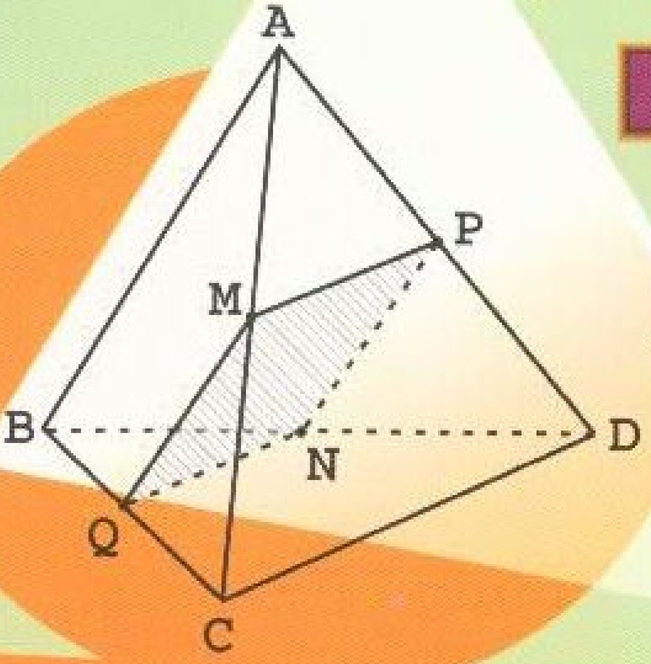
NGUYỄN VŨ THANH

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC
12
NÂNG CAO



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH

Giải bài tập
HÌNH HỌC 12
NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách ***GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO*** *này được biên soạn theo chương trình sách giáo khoa hiện hành, nhằm giúp các em có tài liệu tham khảo để ôn tập, củng cố kiến thức, đồng thời vận dụng để làm những bài tập có dạng tương tự hoặc nâng cao đạt kết quả tốt.*

Quý thầy cô và quý phụ huynh có thể xem quyển sách này như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

CHƯƠNG I KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khối đa diện, khối chóp, khối lăng trụ

- Hình $\mathcal{H}$ cùng với các điểm nằm trong $\mathcal{H}$ được gọi là khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathcal{H}$.
- Khối đa diện được gọi là khối chóp, khối chóp cụt nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp, hình chóp cụt.
- Ta xét các khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathcal{H}$ thỏa hai điều kiện:
  i) Hai đa giác bất kỳ hoặc không có điểm chung hoặc có một điểm chung hoặc có một cạnh chung.
  ii) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

2. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

Mọi khối chóp và khối lăng trụ luôn có thể phân chia được thành những khối tứ diện.

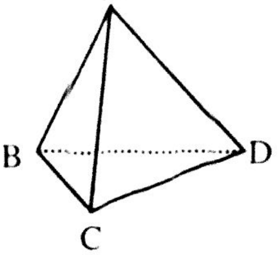
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Chứng minh nếu khối đa diện có các mặt là các tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.

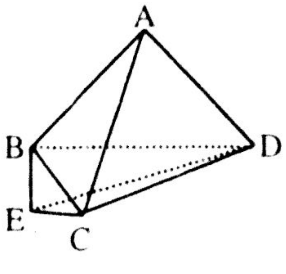
Giải

Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số mặt là M. Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh lại chung cho hai mặt bên nên 3M = 2C. Suy ra M là số chẵn.

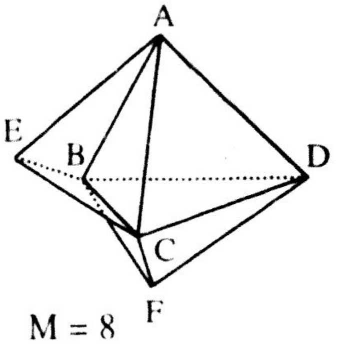
Sau đây là một số khối đa diện có các mặt là tam giác.



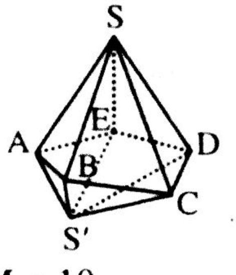
M = 4



M = 6



M = 8



M = 10

2. *Chứng minh rằng nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.*

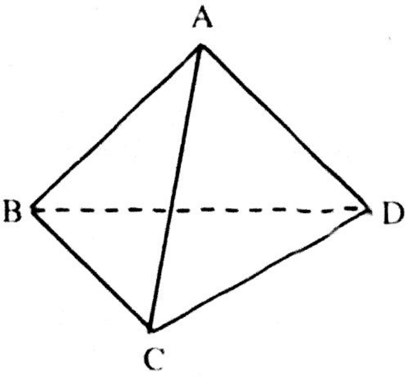
Giải

Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số đỉnh là Đ. Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh có 2 đỉnh nên 3Đ = 2C do đó Đ là số chẵn.

3. *Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện.*

Giải

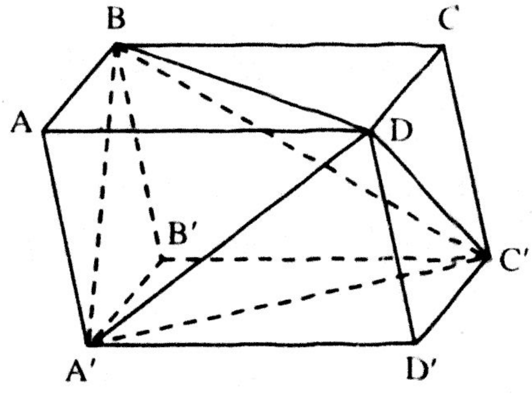
Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. Theo giả thiết, đỉnh A là đỉnh chung cho ba cạnh, ta gọi ba cạnh đó là AB, AC, AD. Cạnh AB phải là cạnh chung của hai mặt tam giác, đó là hai mặt ABC và ABD (vì qua đỉnh A chỉ có 3 cạnh). Tương tự, ta có các mặt tam giác ACD và BCD. Vậy khối đa diện đó chính là khối tứ diện ABCD.



4. *Hãy phân chia một khối hộp thành 5 khối tứ diện.*

Giải

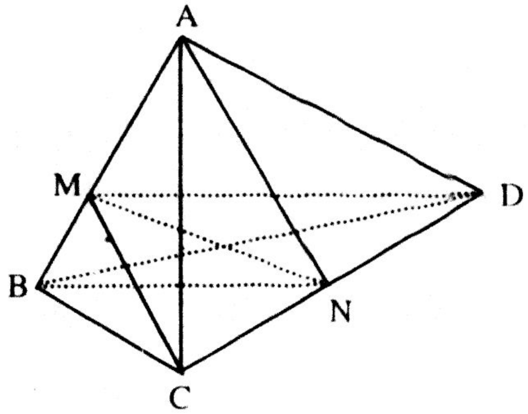
Có thể phân chia khối hộp ABCD.A′B′C′D′ thành năm khối tứ diện sau đây: ABDA′, CBDC′, B′A′C′B, D′A′C′D, BDA′C′.



5. *Hãy phân chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bởi hai mặt phẳng.*

Giải

Cho khối tứ diện ABCD. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB), ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện: AMCN, AMND, BMCN, BMND.



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Hãy dùng 4 mặt phẳng để chia một khối tứ diện thành 9 khối tứ diện.

HD: Trên cạnh AB lấy hai điểm M, M′ và trên cạnh CD lấy hai điểm N, N′.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Phép đối xứng qua mặt phẳng

a) Định nghĩa: Phép đối xứng qua mặt phẳng (α) là phép biến hình biến điểm $M \in (\alpha)$ thành chính nó và biến điểm $M \notin (\alpha)$ thành điểm M' sao cho (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn MM'.

b) Định lí: Nếu phép đối xứng qua mp(α) biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì $MN = M'N'$.

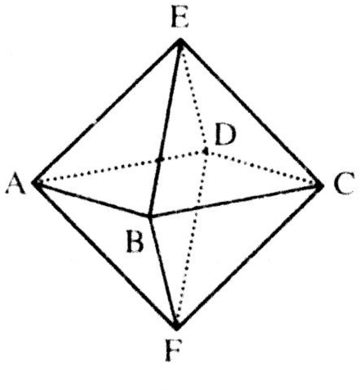
2. Mặt phẳng đối xứng của một hình

Định nghĩa

Nếu phép đối xứng qua mp(α) biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}$ thì (α) được gọi là mặt phẳng đối xứng của hình $\mathscr{H}$.

3. Hình bát diện đều và mặt phẳng đối xứng của nó

- Được kí hiệu là ABCDEF là hình có 8 mặt là các tam giác đều.
- Bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên một mặt phẳng và đó là một mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều ABCDEF.



4. Phép dời hình và sự bằng nhau của các hình

a) Định nghĩa: Một phép biến hình F trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

b) Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

c) Định lí: Hai hình tứ diện được gọi là bằng nhau, nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau.

d) Hệ quả 1: Hai hình tứ diện đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

e) Hệ quả 2: Hai hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

6. *Gọi Đ là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử Đ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì:*

a) a trùng với a′; *b) a song song với a′;*

c) a cắt a′; *d) a và a′ chéo nhau?*

Giải

a) a trùng với a′ khi a nằm trên mp(P) hoặc a vuông góc với mp(P).

b) a song song với a′ khi a song song với mp(P).

c) a cắt a′ khi a cắt mp(P) nhưng không vuông góc với (P).

d) a và a′ không bao giờ chéo nhau.

7. *Tìm các mặt phẳng đối xứng của các hình sau đây:*

a) Hình chóp tứ giác đều.

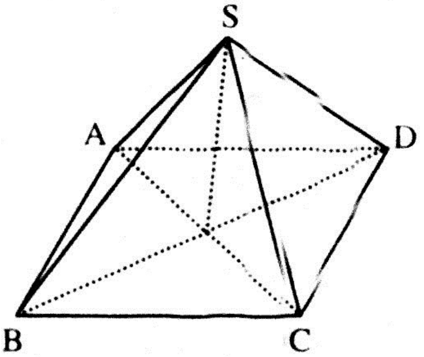
b) Hình chóp cụt tam giác đều.

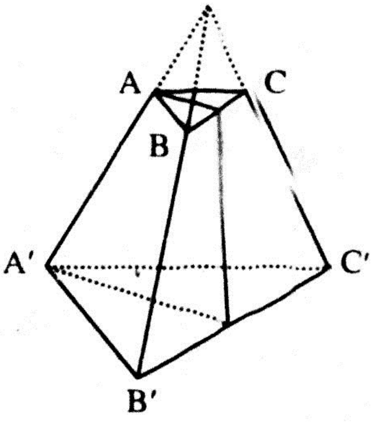
c) Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào vuông.

Giải

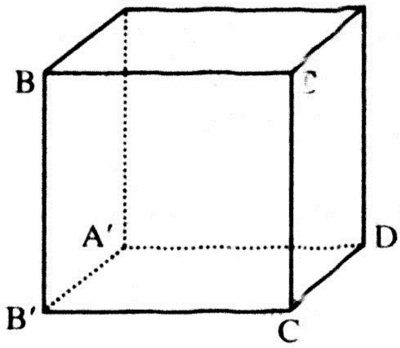
a) Các mặt phẳng đối xứng của hình chóp tứ giác đều S.ABCD là các mặt phẳng:

- Mp(SAC)
- Mp(SBD)
- Mặt phẳng trung trực đoạn AB.
- Mặt phẳng trung trực đoạn AD.





b) Hình chóp cụt tam giác đều ABC.A′B′C′ có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, BC, CA.



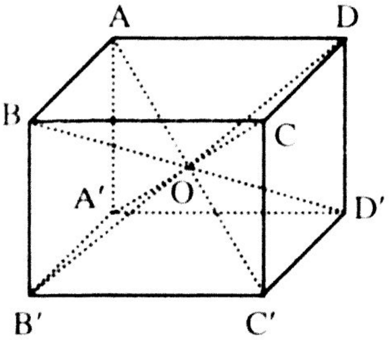
c) Hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ (mà không có mặt nào là hình vuông) có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA′.

8. *Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′. Chứng minh rằng:*

a) Các hình chóp A.A′B′C′D′ và C′.ABCD bằng nhau.

b) Các hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

Giải



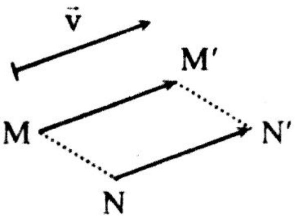
Gọi O là tâm của hình lập phương.

a) Phép đối xứng tâm O biến các đỉnh của hình chóp A.A'B'C'D' thành các đỉnh của hình chóp C'.ABCD.
Vậy hai hình chóp đó bằng nhau.

b) Phép đối xứng qua mp(ADC'B') biến các đỉnh của hình lăng trụ ABC.A'B'C' thành các đỉnh của hình lăng trụ AA'D'.BB'C' nên hai hình lăng trụ đó bằng nhau.

9. *Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm là những phép dời hình.*

Giải



a) Giả sử $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

Giả sử $T_{\vec{v}}$: $M \mapsto M'$

$N \to N'$

Ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

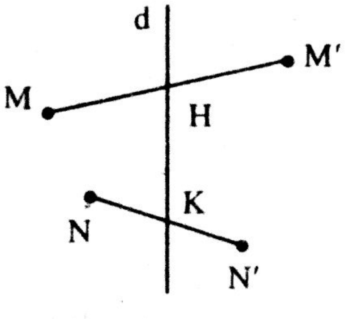
$\Rightarrow MN = M'N'$

Vậy phép tịnh tiến là một phép dời hình.

b) Giả sử $Đ_d$ là phép đối xứng qua đường thẳng d

Giả sử $Đ_d$: $M \mapsto M'$

$N \mapsto N'$



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của MM' và NN'.

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN}\right) + \left(\overrightarrow{M'H} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN'}\right) = 2\overrightarrow{HK}$$

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HN'} + \overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}$$

Vì $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{N'N} \perp \overrightarrow{HK}$ nên

$$\overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{M'N'}^2 = \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}\right)\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}\right) = 2\overrightarrow{HK}.\left(\overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}\right) = 0$$

$\Rightarrow MN^2 = M'N'^2 \Rightarrow MN = M'N'$

Vậy phép đối xứng qua d là phép dời hình.

c) Nếu phép đối xứng tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$,

suy ra $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}$

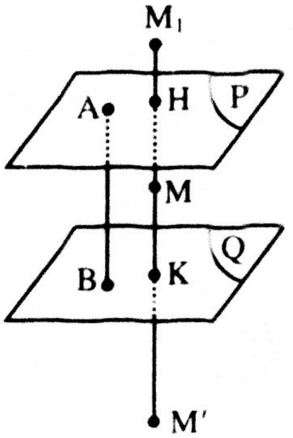
Do đó M'N' = MN, suy ra phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

***10.** Chứng minh rằng :*

a) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

Giải



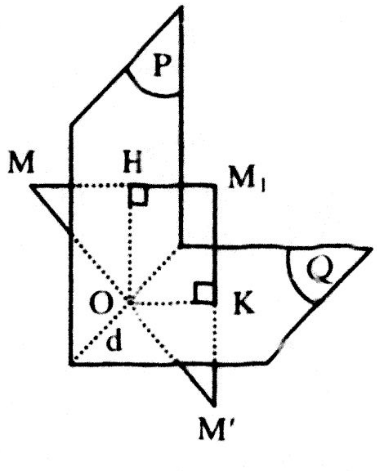
a) Lấy hai điểm A và B lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho AB ⊥ (P). Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với M_1 qua mp(Q).

Như vậy, M' là ảnh của M qua phép hợp thành của phép đối xứng qua mp(P) và phép đối xứng qua mp(Q).

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M' thì ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}\right) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}$$

Như vậy phép hợp thành nói trên chính là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.



b) Giả sử (P) ⊥ (Q) và d = (P) ∩ (Q)

Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua (P) và H là trung điểm MM_1.

Gọi M' là điểm đối xứng của M_1 qua (Q) và K là trung điểm của M_1M'.

Gọi O là giao điểm của (MM_1M') với d

Ta có $(MM_1M') \perp (P)$ và $(MM_1M') \perp (Q)$ nên $(MM_1M') \perp d$

Ta có OHM_1K là hình chữ nhật và

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM'}\\ &= \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}\right) + \left(\overrightarrow{M_1H} + \overrightarrow{M_1K}\right) = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1O} = \vec{O}\end{aligned}$$

Suy ra O là trung điểm của MM', mặt khác MM' ⊥ d. Vậy phép hợp thành của phép đối xứng qua mp(P) và phép đối xứng qua mp(Q) với (P) ⊥ (Q) là phép đối xứng qua d.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Chứng minh rằng phép dời hình biến một mặt cầu thành một mặt cầu có cùng bán kính.

2. Chứng minh rằng hai hình lập phương bằng nhau nếu các đường chéo của chúng có độ dài bằng nhau.

§3. PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN. CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phép vị tự trong không gian

Định nghĩa: Cho $k \neq 0$ và O cố định. Phép biến hình trong không gian biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Các tính chất:

a) Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và do đó $M'N' = |k|MN$.

b) Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

2. Hai hình đồng dạng

Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến hình H thành hình H_1 mà hình H_1 bằng hình H'.

3. Khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều

- Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có hai tính chất:

  i) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh;

  ii) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

- Khối đa diện đều loại {n, p} là khối đa diện đều mà mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

11. *Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến mỗi mặt phẳng thành một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng đó.*

Giải

a) Giả sử V_k là phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng a thành đường thẳng a', lấy $M, N \in a$ và $V_k(M) = M'$, $V_k(N) = N'$; $M', N' \in a'$.

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{M'N'}$ do đó hai đường thẳng a và a' song song hoặc trùng nhau.

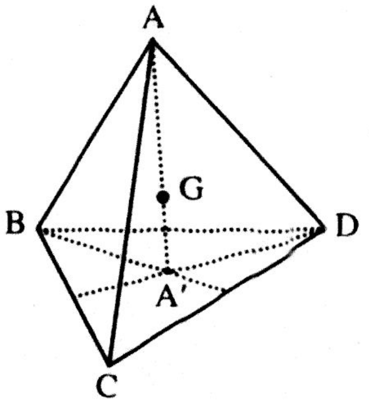
b) Giả sử phép vị tự V_k biến mp(α) thành mp(α'). Lấy trên (α) hai đường thẳng cắt nhau a và b thì ảnh của chúng qua V_k là hai đường thẳng a' và b' nằm trên (α') và lần lượt song song hoặc trùng với a và b. Từ đó suy ra hai mặt phẳng (α) và (α') song song hoặc trùng nhau.

12. *Cho một khối tứ diện đều, hãy chứng minh rằng :*

a) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

b) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

Giải



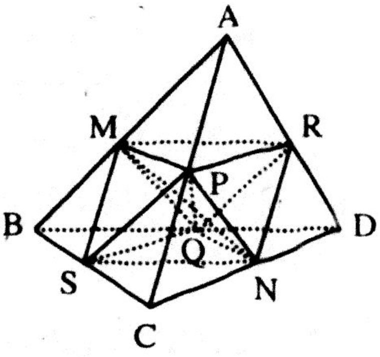
a) Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, BDA, ABC của tứ diện đều ABCD có trọng tâm G

Ta có $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$

Gọi $V\left(G; -\frac{1}{3}\right)$ là phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{3}$ ta có A', B', C', D' lần lượt là ảnh của A, B, C, D qua phép vị tự V. Từ đó suy ra

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{1}{3}$$

Do đó nếu ABCD là tứ diện đều thì A'B'C'D' cũng là tứ diện đều.



b) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của khối tứ diện đều ABCD. Khi đó, tám tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều, chúng làm thành khối đa diện với các đỉnh là M, N, P, Q, R, S mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của bốn cạnh. Vậy đó là khối tám mặt đều.

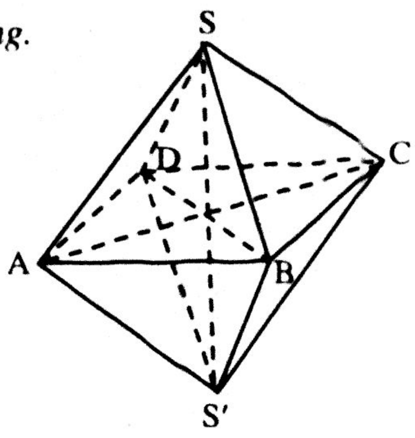
13. *Hai đỉnh của một khối tám mặt đều được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của khối tám mặt đều. Chứng minh rằng trong khối tám mặt đều :*

a) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau.

c) Ba đường chéo bằng nhau.

Giải



Giả sử SABCDS' là khối tám mặt đều.

Ba đường chéo của nó là SS', AC và BD.

Bốn điểm A, B, C, D cách đều hai điểm S và S' nên cùng nằm trên một mặt phẳng.

Vậy ABCD là hình thoi, ngoài ra S cách đều A, B, C, D nên hình thoi đó là hình vuông. Suy ra hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, chúng vuông góc với nhau và có độ dài bằng nhau. Tương tự đối với các cặp đường chéo còn lại.

14. *Chứng minh rằng :*

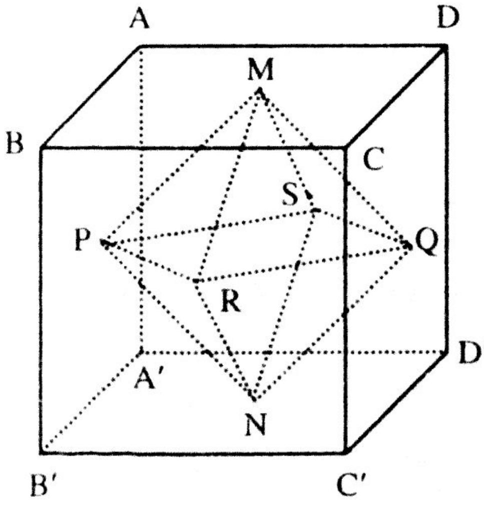
a) Tâm các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

b) Tâm các mặt của một khối tám mặt đều là các đỉnh của một khối lập phương.

Giải

a) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là tâm của các mặt ABCD, A'B'C'D', ABB'A', CDD'C', BCC'B', ADD'A' của khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Khi đó, tám tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều, chúng làm thành khối đa diện với các đỉnh là M, N, P, Q, R, S mà mỗi đỉnh có bốn cạnh. Vậy đó là khối tám mặt đều.

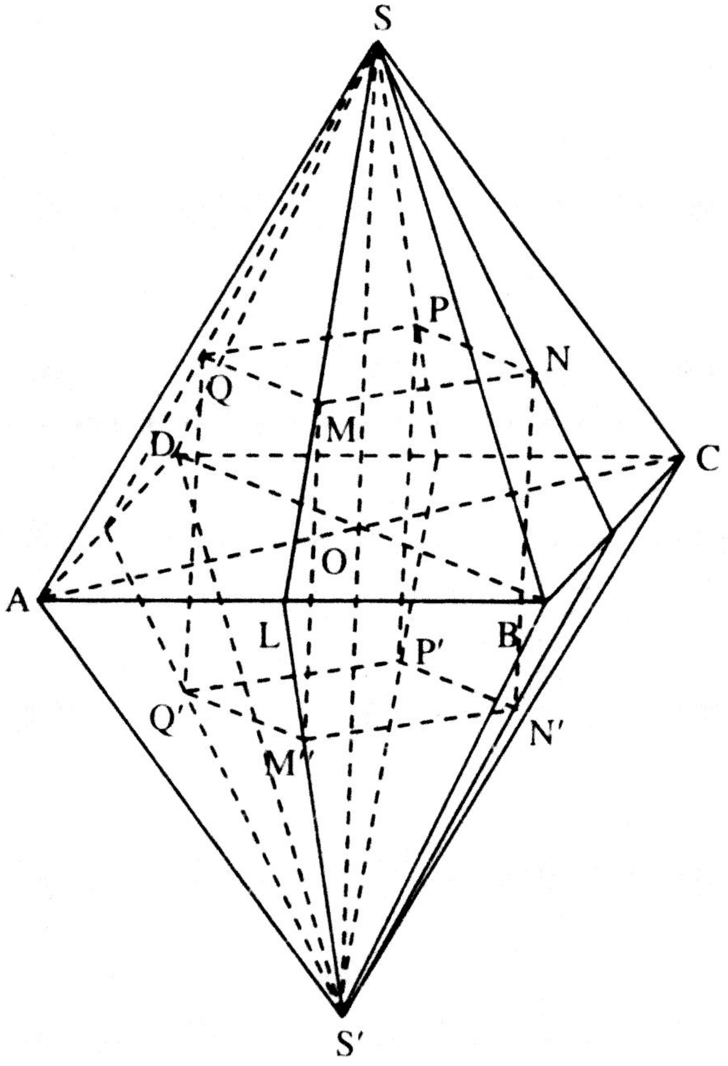
Chú ý: Tám tam giác đều của khối tám mặt đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ với a là cạnh hình lập phương.

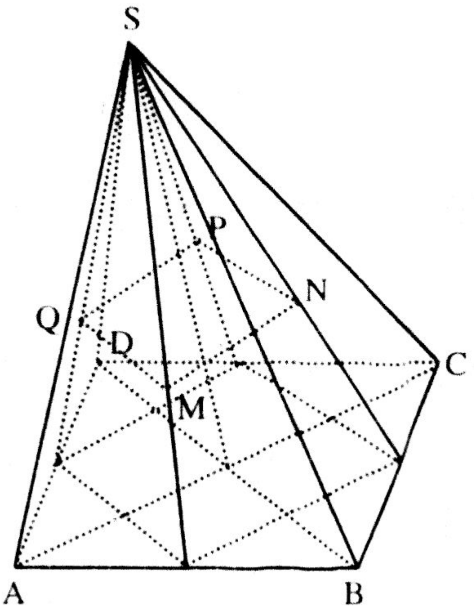


b) Cho khối tám mặt đều SABCDS'. Gọi M, N, P, Q, M', N', P', Q' lần lượt là trọng tâm của các mặt SAB, SBC, SCD, SAD, S'AB, S'BC, S'CD, S'DA thì các tứ giác MNPQ, M'N'P'Q', MNN'M', PQQ'P', NPP'N', MQQ'M' đều là hình vuông và mỗi đỉnh M, N, P, Q, M', N', P', Q' đều là đỉnh chung của 3 cạnh.

Vậy MNPQ.M'N'P'Q' là khối lập phương.

Chú ý: Giả sử cạnh của khối tám mặt đều là a thì cạnh khối lập phương MNPQ.M'N'P'Q' là $\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.





C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k'. Chứng minh rằng nếu $kk' = 1$ thì hợp thành của V và V' là một phép tịnh tiến.*
2. *Cho hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng song song AB // A'B', AC // A'C', AD // A'D', CB // C'B', BD // B'D', DC // D'C'. Chứng minh rằng hai tứ diện trên đồng dạng.*

§4. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Thể tích của khối hộp chữ nhật

$$V = abc$$

a, b, c là các kích thước của khối hộp chữ nhật.

2. Thể tích của khối chóp

Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó.

$$V = \frac{1}{3}.S_{đáy}.h$$

3. Thể tích của khối lăng trụ

Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó

$$V = S_{đáy}.h$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

15. *Cho tam giác ABC cố định và một điểm S thay đổi. Thể tích khối chóp S.ABC có thay đổi hay không nếu :*

a) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) ?

b) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với chỉ một cạnh đáy ?

c) Đỉnh S di chuyển trên một đường thẳng song song với một cạnh đáy ?

Giải

a) Thể tích khối chóp S.ABC không đổi do diện tích đáy và chiều cao không đổi.

b) Có thể thay đổi do chiều cao có thể thay đổi.

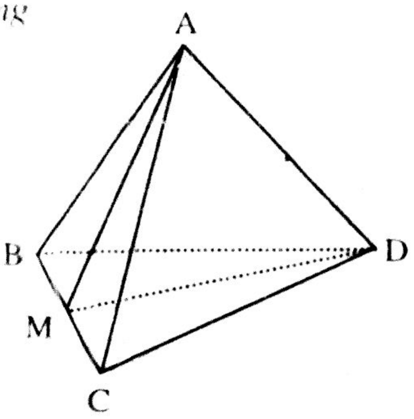
c) Không đổi do diện tích đáy và chiều cao không đổi.

16. *Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng một số k > 0 cho trước.*

Giải

Cho khối tứ diện ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho MB = kMC, khi đó $S_{BMD} = k.S_{CMD} \Rightarrow V_{ABMD} = k.V_{AMCD}$

Mặt phẳng (AMD) chia khối tứ diện ABCD thành hai khối tứ diện có tỉ số thể tích bằng k.



17. *Tính thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' biết rằng AA'B'D' là khối tứ diện đều cạnh a.*

Giải

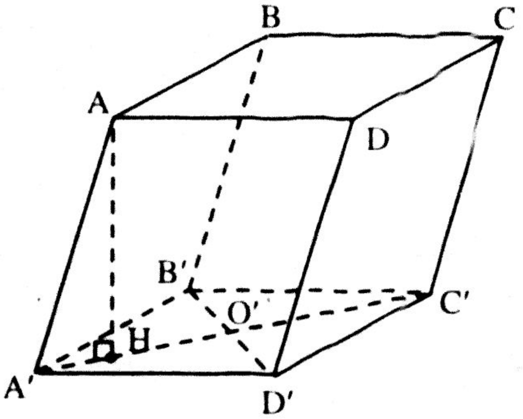
AA'B'D' là tứ diện đều nên đường cao AH có H là tâm của tam giác đều

A'B'D' cạnh a do đó:

$$A'H = \frac{2}{3}.A'O' = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad AH^2 = AA'^2 - A'H^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad AH = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Diện tích tam giác đều A'B'D':

$$S_{A'B'D'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Diện tích hình thoi A'B'C'D': $S_{A'B'C'D'} = 2S_{A'B'D'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

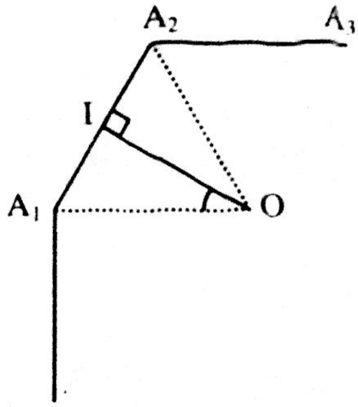
Vậy thể tích khối hộp đã cho là $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

18. *Tính thể tích của khối lăng trụ n-giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.*

Giải

Gọi $A_1A_2...A_n$ là đáy của khối lăng trụ n–giác đều và O là tâm của đáy

Gọi I là trung điểm A_1A_2 ta có $OI \perp A_1A_2$



Trong ΔA_1IO: $\cot \widehat{A_1OI} = \frac{OI}{A_1I} \Rightarrow OI = \frac{a}{2}.\cot\frac{\pi}{n}$

Diện tích đáy của khối lăng trụ đều là

$$S = n.\,S_{OA_1A_2} = n.\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}na^2.\cot\frac{\pi}{n}$$

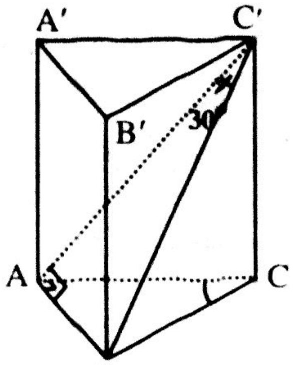
Chiều cao của khối lăng trụ đều là a nên thể tích của nó là $V = B.h = \frac{1}{4}na^3.\cot\frac{\pi}{n}$.

19. *Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AC = b, $\widehat{ACB} = 60^0$. Đường thẳng BC' tạo với mp(AA'C'C) một góc 30^0.*

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

b) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Giải



a) Ta có BA ⊥ AC và BA ⊥ AA' nên BA ⊥ (ACC'A')

Vậy AC' là hình chiếu của BC' trên mp(ACC'A') nên $\widehat{AC'B} = 30^0$

Trong tam giác vuông BAC′ ta có

$$\cot 30^0 = \frac{AC'}{AB} \Rightarrow AC' = AB.\cot 30^0 = AC.\tan 60^0.\cot 30^0 = b\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3b.$$

b) Trong tam giác vuông ACC′ ta có:

$$CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2 \Rightarrow CC' = 2\sqrt{2}\,b$$

Diện tích ΔABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}b\sqrt{3}.b = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S.h = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}.2\sqrt{2}\,b = b^3\sqrt{6}$.

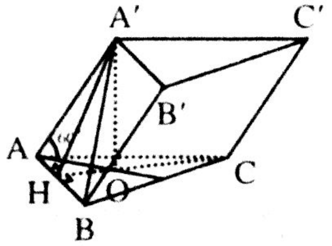
20 *Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A′ cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA′ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°.*

a) Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

b) Chứng minh rằng mặt bên BCC′B′ là một hình chữ nhật.

c) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ ABC.A′B′C′ (tổng đó gọi là diện tích xung quanh của hình (hoặc khối) lăng trụ đã cho).

Giải



a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC

Vì A′ cách đều ba điểm A, B, C nên A′ nằm trên trục của ΔABC do đó

A′O ⊥ mp(ABC)

AO là hình chiếu của AA′ trên mp(ABC).

Do đó $\widehat{A'AO} = 60^0$

Trong tam giác vuông A′OA ta có:

$$\tan 60^0 = \frac{A'O}{AO} \Rightarrow A'O = AO.\tan 60^0 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a$$

Vậy thể tích khối lăng trụ là: $V = B.h = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

b) Vì BC ⊥ AO nên BC ⊥ (AOA′) suy ra BC ⊥ AA′ hay BC ⊥ BB′

Vậy BCC′B′ là hình chữ nhật.

c) Gọi H là trung điểm của AB. Ta có AB ⊥ (A′HO) ⇒ A′H ⊥ AB.

Trong tam giác vuông A′OH ta có

$$A'H^2 = A'O^2 + OH^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{13a^2}{12} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

Diện tích hình bình hành ABB′A′: $S_{ABB'A'} = AB.A'H = a^2\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 3011

Tương tự $S_{AA'C'C} = a^2\dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

Diện tích hình chữ nhật BB'C'C là:

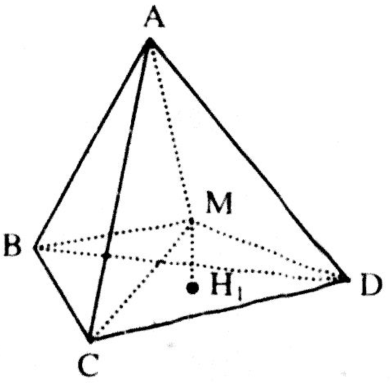
$$S_{BB'C'C} = BB'.BC = AA'.BC = \frac{AO}{\cos 60^0}.a = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy diện tích xung quanh hình lăng trụ là

$$S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} = \frac{a^2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{13}+2\right).$$

21. *Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a?*

Giải



Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Khi đó MH_1, MH_2, MH_3, MH_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M tới các mặt phẳng đó. Các mặt bên của tứ diện đều có cùng diện tích, ta kí hiệu các diện tích đó là S và gọi h là chiều cao của tứ diện đều. Ta có:

$$V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = V_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S.MH_1 + \frac{1}{3}S.MH_2 + \frac{1}{3}S.MH_3 + \frac{1}{3}S.MH_4 = \frac{1}{3}S.h$$

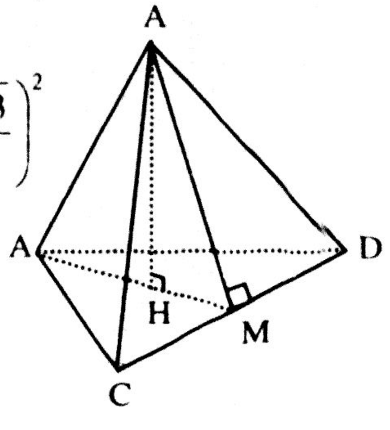
$$\Leftrightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 + MH_4 = h$$

Vậy tổng các khoảng cách từ điểm M tới bốn mặt của tứ diện đều không phụ thuộc vào vị trí của điểm M nằm trong tứ diện đều đó.

Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a, ta tính h

Gọi H là trực tâm tam giác đều BCD

và M là trung điểm CD



Ta có: $h^2 = AH^2 = AM^2 - HM^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

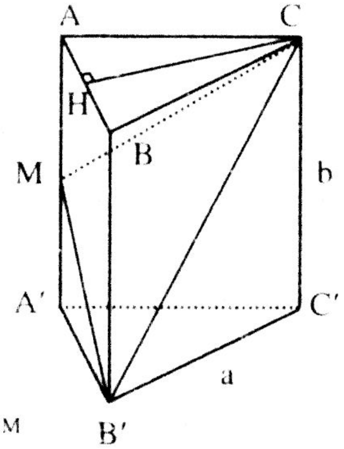
Tổng các khoảng cách nói trên bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

22. *Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Mặt phẳng đi qua M, B', C chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.*

Giải

Gọi độ dài cạnh đáy của lăng trụ là a, độ dài cạnh bên là b.

Kẻ đường cao CH của tam giác ABC thì CH ⊥ (ABB'A'), $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Diện tích hình thang ABB'M là

$$S_{ABB'M} = \frac{1}{2}(AM + BB').AB = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + b\right).a = \frac{3ab}{4}$$

Thể tích khối chóp C.ABB'M là

$$V_{C.ABB'M} = \frac{1}{3}S_{ABB'M}.CH = \frac{1}{3}.\frac{3ab}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{8}$$

Thể tích khối lăng trụ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.b = \frac{a^2b\sqrt{3}}{4} = 2V_{C.ABB'M}$$

Vậy $V_{C.ABB'M} = V_{B'.A'C'CM}$

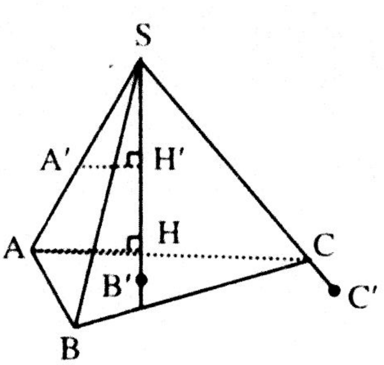
Chú ý: Có thể chứng minh được hai khối chóp C.ABB'M và B'A'C'CM có chiều cao bằng nhau và có diện tích đáy bằng nhau nên chúng có thể tích bằng nhau.

23. *Cho khối chóp tam giác S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp S.ABC và S.A'B'C'. Chứng minh rằng :* $\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

Giải

Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu của A và A' trên mp(SBC). Khi đó ba điểm S, H, H' thẳng hàng (vì chúng là hình chiếu của ba điểm thẳng hàng S, A, A' trên mp(SBC)) và vì A'H' // AH nên $\frac{AH}{A'H'} = \frac{SA}{SA'}$. Ta có:

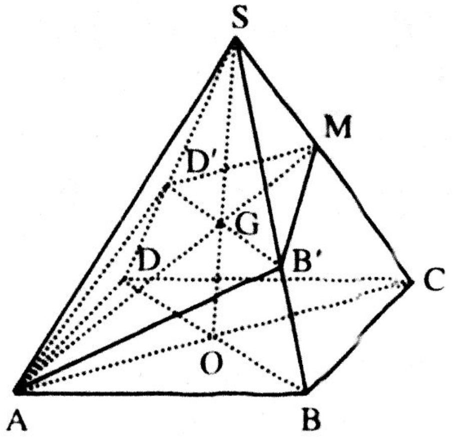
$$\frac{S_{SBC}}{S_{SB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}.SB.SC.\sin\widehat{BSC}}{\frac{1}{2}.SB'.SC'.\sin\widehat{B'SC'}} = \frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$$



Suy ra $\dfrac{V}{V'}=\dfrac{V_{A.SBC}}{V_{A'.SB'C'}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{SBC}.AH}{\frac{1}{3}S_{SB'C'}.A'H'}=\dfrac{SB.SC.AH}{SB'.SC'.A'H'}=\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}.\dfrac{SA}{SA'}$.

24. *Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, M là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.*

Giải



Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD

Gọi G là giao điểm của AM và SO thì G là trọng tâm tam giác SAC nên $\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{2}{3}$

Mặt phẳng (P) song song với BD nên (P) cắt mp(SBD) theo giao tuyến B'D' đi qua G và B'D' // BD, trong đó B', D' lần lượt trên SB và SD

ΔSBD có B'D' // BD nên $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{2}{3}$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần: khối chóp S.AB'MD và khối đa diện ABCDB'MD'. Áp dụng kết quả bài 23 ta có:

$\dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{2}{9}$ (Vì $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABD}$)

$\dfrac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.CBD}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\Rightarrow\dfrac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{9}$

Từ đó suy ra: $\dfrac{V_{SAB'MD'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{S.AB'D'}+V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $\dfrac{V_{SAB'MD'}}{V_{ABCDB'MD'}}=\dfrac{1}{2}$.

25. *Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' thì* $\dfrac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}}=|k|^3$.

Giải

Giả sử phép vị tự f tỉ số k biến hình chóp A.BCD thành hình chóp A'.B'C'D'. Khi đó, f biến đường cao AH của hình chóp A.BCD thành đường cao A'H' của hình chóp A'.B'C'D' do đó A'H' = $|k|$AH. Tam giác BCD được biến thành tam giác B'C'D' qua f nên $S_{B'C'D'}=k^2S_{BCD}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3}S_{B'C'D'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{BCD}.AH} = |k|^3$

C BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.*

2. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD.*

a) Biết AB = a và góc giữa mặt bên và đáy bằng α, tính thể tích khối chóp.

b) Biết trung đoạn bằng d và góc giữa cạnh bên và đáy bằng φ, tính thể tích của khối chóp.

3. *Cho hình chóp tam giác đều S.ABC.*

a) Biết AB = a và SA = l, tính thể tích khối chóp.

b) Biết SA = l và góc giữa mặt bên và đáy bằng α, tính thể tích khối chóp.

4. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB, SC.*

a) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

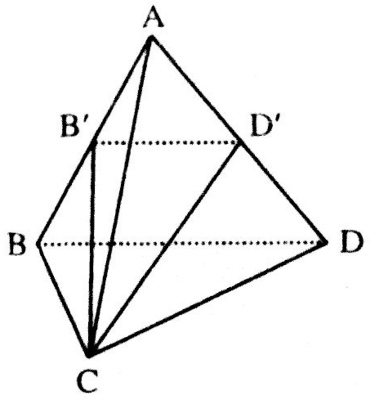
b) So sánh thể tích của hai khối đa diện do mặt phẳng (MNP) chia ra trên hình chóp.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. *Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Gọi B′ và D′ lần lượt là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng (CB′D′) chia khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.*

Giải

Mp(CB′D′) chia khối tứ diện thành hai khối chóp C.AB′D′ và C.BB′D′D. Hai khối chóp này có chiều cao bằng nhau.



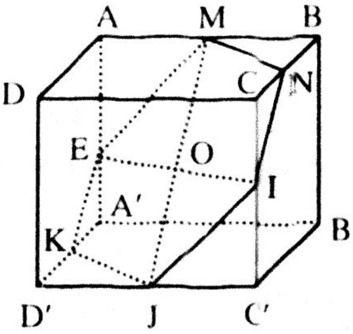
Mặt khác: $S_{AB'D'} = \dfrac{1}{4}S_{ABD} \Rightarrow V_{C.AB'D'} = \dfrac{1}{4}V$

Do đó $V_{C.BB'D'D} = \dfrac{3}{4}V.$

2. *Cho khối hộp ABCD.A′B′C′D′. Chứng minh rằng sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC′, C′D′, D′A′ và A′A nằm trên một mặt phẳng và mặt phẳng đó chia khối hộp thành hai phần có thể tích bằng nhau.*

Giải

Gọi M, N, I, J, K, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A', A'A của khối hộp ABCD.A'B'C'D' tâm O.



Ta có O là tâm hình bình hành ABC'D' nên M, O, J thẳng hàng (O là trung điểm của MJ). Mặt khác ba đường thẳng MN, EI và KJ đôi một song song nhau (vì cùng song song với AC) nên chúng đồng phẳng.

Vậy 6 điểm M, N, I, J, K, E cùng nằm trên một mặt phẳng (α)

Mp(α) chia khối hộp thành hai khối đa diện, khối thứ nhất có các đỉnh M, N, I, J, K, E, A, C, D, D', khối thứ hai có các đỉnh M, N, I, J, K, E, C', A', B, B'

Phép đối xứng qua điểm O biến tập hợp đỉnh của khối đa diện thứ nhất thành tập hợp đỉnh của khối đa diện thứ hai. Suy ra hai khối đa diện đó bằng nhau và do đó có thể tích bằng nhau.

3. *Cho khối tứ diện ABCD. E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện.*

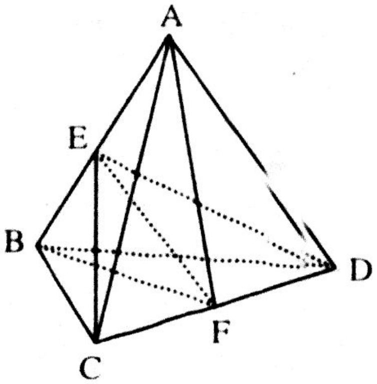
a) Kể tên bốn khối tứ diện đó.

b) Chứng tỏ rằng bốn khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.

c) Chứng tỏ rằng nếu ABCD là khối tứ diện đều thì bốn khối tứ diện nói trên bằng nhau.

Giải

a) Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện: ADEF, ACEF, BDEF và BCEF.



b) Vì F là trung điểm CD nên mp(ABF) chia khối tứ diện ABCD thành hai khối tứ diện ABCF và ABDF có thể tích bằng nhau.

Vì E là trung điểm AB nên mp(CDE) lại chia mỗi khối tứ diện ABCF và ABDF thành hai khối tứ diện có thể tích bằng nhau.

Vậy $V_{ADEF} = V_{ACEF} = V_{BDEF} = V_{BCEF}$.

c) Nếu ABCD là tứ diện đều thì nó nhận mp(ABF) và mp(CDE) làm các mặt phẳng đối xứng và phép đối xứng qua đường thẳng EF biến tứ diện ADEF thành tứ diện BCEF. Từ đó suy ra:

Khối tứ diện ADEF bằng khối tứ diện ACEF (vì chúng đối xứng với nhau qua mp(ABF)).

Khối tứ diện ADEF bằng khối tứ diện BDEF (vì chúng đối xứng với nhau qua mp(CDE)).

Khối tứ diện ADEF bằng khối tứ diện BCEF (vì phép đối xứng qua trục EF biến tứ diện này thành tứ diện kia).

4. *Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1 và C_1. Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.*

a) Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P).

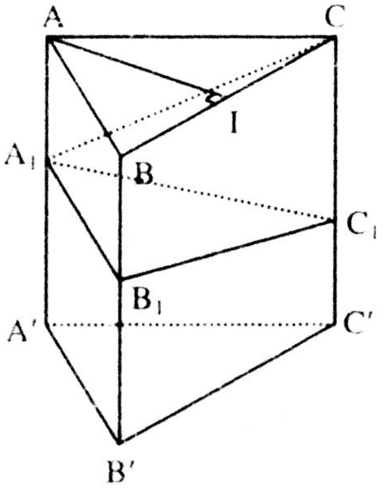
b) Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau ?

(Hướng dẫn. Nếu a là số bé nhất trong ba số a, b, c thì qua A_1 vẽ mặt phẳng song song với đáy của hình lăng trụ, nó sẽ chia khối lăng trụ đó thành hai phần mà có thể tính được thể tích của chúng, từ đó có thể tính được các thể tích ở câu a)).

Giải

a) Kẻ đường cao AI của tam giác ABC thì AI ⊥ (BCC'B')

$\Rightarrow AI = d(A_1, (BCC'B'))$. Ta có:



$$* \quad V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}.S_{BCC_1B_1}.AI$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(b + c).BC.AI$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}(b + c).S = \frac{1}{3}(a + b + c).S$$

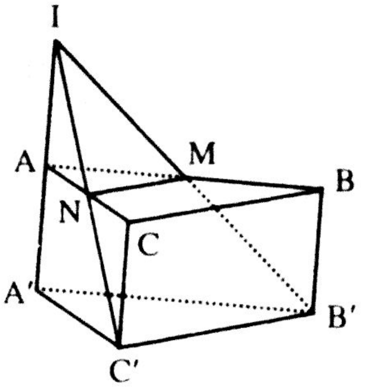
$$* \quad V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$= Sh - \frac{1}{3}(a + b + c)S = \frac{1}{3}[(h - a) + (h - b) + (h - c)].S$$

b) $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(a + b + c).S = \frac{1}{2}Sh \Leftrightarrow 3h = 2(a + b + c).$

5. *Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.*

Giải



Gọi I là giao điểm của đường thẳng B'M với AA'; N là giao điểm của IC' với AC. Khi đó A là trung điểm của A'I và N là trung điểm của AC.

Đặt $S_{ABC} = S$ và $AA' = h$

Thiết diện của mp(B'C'M) với khối lăng trụ ABC.A'B'C' là hình thang cân MNC'B'. Mp(B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa cạnh AA' có thể tích là V_1, phần còn lại có thể tích là V_2. Khi đó ta có:

$$V_1 = V_{AMN.A'B'C'} = V_{I.A'B'C'} - V_{I.AMN} = \frac{1}{3}.S.2h - \frac{1}{3}.\frac{S}{4}.h$$

$$= \frac{2}{3}Sh - \frac{1}{12}Sh = \frac{7}{12}Sh = \frac{7}{12}(V_1 + V_2)$$

$$\Rightarrow 12V_1 = 7V_1 + 7V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$

6. *Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC.*

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mp(AB'C').

c) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'.

Giải

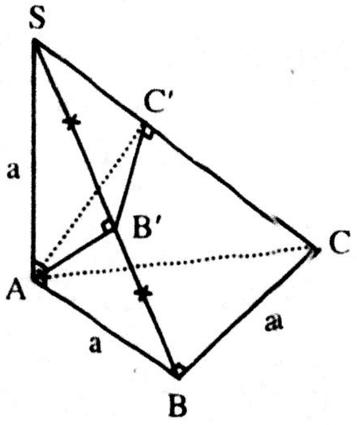
a) Thể tích khối chóp S.ABC là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}a^2.a = \frac{a^3}{6}$

b) Ta có $BC \perp BA$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$ do đó $AB' \perp BC$

Ta có $AB' \perp SB$ và $AB' \perp BC$ nên $AB' \perp SC$ (do $AB' \perp (SBC)$)

Theo giả thiết $SC \perp AC'$, $SC \perp AB'$

Suy ra $SC \perp$ mp (AB'C')



c) Ta có AC' là đường cao tam giác vuông SAC

nên $\frac{SC'}{SC} = \frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$

Từ đó suy ra $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Vì $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$ nên $V_{S.AB'C'} = \frac{a^3}{36}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. *Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất :*

(A) Năm cạnh ; *(B) Bốn cạnh ;* *(C) Ba cạnh ;* *(D) Hai cạnh.*

2. *Cho khối chóp có đáy là n-giác. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

(A) Số cạnh của khối chóp bằng $n + 1$;

(B) Số mặt của khối chóp bằng $2n$;

(C) Số đỉnh của khối chóp bằng $2n + 1$;

(D) Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

3. *Phép đối xứng qua mp(P) biến đường thẳng d thành chính nó khi và chỉ khi :*

(A) d song song với (P) ; *(B) d nằm trên (P) ;*

(C) $d \perp (P)$ *(D) d nằm trên (P) hoặc $d \perp (P)$.*

4. *Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d' ?*

(A) Có một ; *(B) Có hai ;* *(C) Không có ;* *(D) Có vô số.*

5. *Cho hai đường thẳng phân biệt d và d' đồng phẳng. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d'.*

(A) Không có ; *(B) Có một ;* *(C) Có hai ;* *(D) Có một hoặc hai.*

6. *Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?*

(A) Một ; *(B) Hai ;* *(C) Ba ;* *(D) Bốn.*

7. *Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?*

(A) Một ; *(B) Hai ;* *(C) Ba ;* *(D) Bốn.*

8. *Cho phép vị tự tâm O biến điểm A thành điểm B, biết rằng $OA = 2OB$. Khi đó tỉ số phép vị tự là bao nhiêu ?*

(A) 2 ; *(B) -2 ;* *(C) $\pm\frac{1}{2}$;* *(D) $\frac{1}{2}$.*

9. *Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d'.*

(A) Có một ; *(B) Không có ;*

(C) Có hai ; *(D) Có một hoặc không có.*

10. *Khối tám mặt đều thuộc loại :*

(A) $\{3 ; 3\}$; *(B) $\{4 ; 3\}$;* *(C) $\{5 ; 3\}$;* *(D) $\{3 ; 4\}$.*

11. *Khối hai mươi mặt đều thuộc loại :*

(A) $\{3 ; 4\}$; *(B) $\{3 ; 5\}$;* *(C) $\{4 ; 3\}$;* *(D) $\{4 ; 5\}$.*

12. *Nếu ba kích thước của một khối hộp chữ nhật tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên :*

(A) k lần ; *(B) k^2 lần ;* *(C) k^3 lần ;* *(D) $3k^3$ lần.*

13. *Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 96. Thể tích của khối lập phương đó là :*

(A) 64 ; *(B) 91 ;* *(C) 84 ;* *(D) 48.*

14. *Ba kích thước của một hình hộp chữ nhật làm thành một cấp số nhân có công bội là 2. Thể tích hình hộp đã cho là 1728. Khi đó các kích thước của hình hộp là :*

(A) 8, 16, 32 ; *(B) 2, 4, 8 ;* *(C) $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, 38 ;* *(D) 6, 12, 24.*

15. *Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Thể tích của hình hộp đó là :*

(A) 4 ; *(B) 5 ;* *(C) 6 ;* *(D) 8.*

16. *Một khối lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy bằng 37, 13, 30 và diện tích xung quanh bằng 480. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là :*

(A) 2010 ; *(B) 1010 ;* *(C) 1080 ;* *(D) 2040.*

17. *Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 13, 14, 15, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° và có chiều dài 8. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là :*

(A) 340 ; *(B) 336 ;* *(C) $274\sqrt{3}$;* *(D) $124\sqrt{3}$.*

18. *Đáy của một hình hộp đứng là hình thoi cạnh a, góc nhọn 60°. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Khi đó thể tích của hình hộp là :*

(A) a^3 ; *(B) $a^3\sqrt{3}$;* *(C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$;* *(D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.*

19. *Khi độ dài cạnh của hình lập phương tăng thêm 2cm thì thể tích của nó tăng thêm $98cm^3$. Cạnh của hình lập phương đã cho là :*

(A) 4cm ; *(B) 5cm ;* *(C) 6cm ;* *(D) 3cm.*

20. *Cho một hình hộp với sáu mặt đều là hình thoi cạnh a góc nhọn bằng 60°. Khi đó thể tích của hình hộp là :*

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$; *(B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$;* *(C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$;* *(D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.*

21. *Cho một hình lập phương có cạnh bằng a. Khi đó thể tích của khối tám mặt đều mà các đỉnh là các tâm của các mặt của hình lập phương đã cho bằng :*

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$; *(B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$;* *(C) $\dfrac{a^3}{3}$;* *(D) $\dfrac{a^3}{6}$.*

22. *Cho một khối tứ diện đều có cạnh bằng a. Khi đó thể tích của khối tám mặt đều mà các đỉnh là trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho là :*

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; (C) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

23. *Cho khối mười hai mặt đều $\mathcal{H}$ có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong $\mathcal{H}$ đến các mặt của nó bằng :*

(A) $\frac{3V}{4S}$; (B) $\frac{V}{4S}$; (C) $\frac{3V}{S}$; (D) $\frac{V}{12S}$.

24. *Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 19, 20, 37, chiều cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng của các cạnh đáy. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là :*

(A) 2888 ; (B) $1245\sqrt{2}$; (C) 1123 ; (D) 4273.

25. *Đáy của một hình hộp là một hình thoi có cạnh bằng 6cm và góc nhọn bằng 45°, cạnh bên hình hộp dài 10cm và tạo với mặt phẳng đáy một góc 45°. Khi đó thể tích của hình hộp là :*

(A) $124\sqrt{3}$ cm³ ; (B) 180cm³ ; (C) $120\sqrt{2}$ cm³ ; (D) $180\sqrt{2}$ cm³.

26. *Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12cm rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Nếu thể tích cái hộp là 4800cm³ thì cạnh tấm bìa có độ dài là :*

(A) 42cm ; (B) 36cm ; (C) 44cm ; (D) 38cm.

27. *Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp đó là :*

(A) $\frac{a^3\cot\alpha}{12}$; (B) $\frac{a^3\tan\alpha}{12}$; (C) $\frac{a^2\tan\alpha}{12}$; (D) $\frac{a^3\tan\alpha}{4}$.

28. *Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp là :*

(A) $\frac{3}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$;

(C) $\frac{3}{4}b^3\cos\alpha\sin^2\alpha$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos\alpha\sin\alpha$.

29. *Cho một hình chóp tứ giác đều $\mathcal{H}$ có diện tích đáy bằng 4 và diện tích của một mặt bên là $\sqrt{2}$. Thể tích của $\mathcal{H}$ là :*

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; (B) 4 ; (C) $\frac{4}{3}$; (D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

30. *Một khối chóp tam giác có các cạnh đáy bằng 6, 8, 10. Một cạnh bên có độ dài 4 và tạo với đáy góc 60°. Thể tích của khối chóp đó là :*

(A) $16\sqrt{3}$;   *(B)* $8\sqrt{3}$;   *(C)* $16\frac{\sqrt{2}}{3}$;   *(D)* 16π.

31. *Nếu một hình chóp đều cùng tăng cả chiều cao và cạnh đáy lên n lần thì thể tích của hình chóp tăng lên :*

(A) n^2 *lần ;*   *(B)* $2n^2$ *lần ;*   *(C)* n^3 *lần ;*   *(D)* $2n^3$ *lần.*

32. *Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó*

(A) Không thay đổi ;   *(B) Tăng lên n lần ;*

(C) Tăng lên (n – 1) lần ;   *(D) Giảm đi n lần.*

Hướng dẫn giải

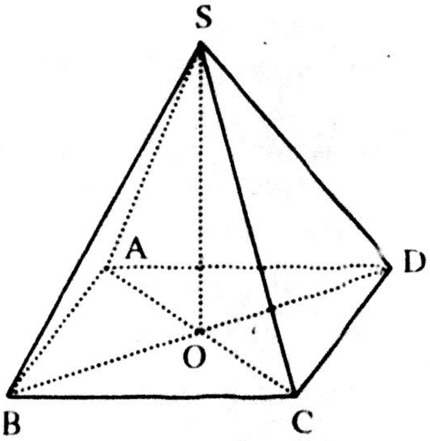
1. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh. Chọn (C).

2. Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó. Chọn (D).

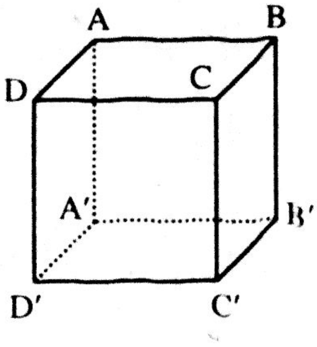
3. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến đường thẳng d thành chính nó khi và chỉ khi d nằm trên (P) hoặc d ⊥ (P). Chọn (D).

4. Có hai phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d′.
Chọn (B).

5. Chọn (D).



6. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có 4 mặt phẳng đối xứng là: mp(SAC), mp(SBD), mặt phẳng trung trực đoạn AB và mặt phẳng trung trực đoạn AD.
Chọn (D).



7. Hình hộp đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy là hình thoi (không là hình vuông) có 3 mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA′.

Chọn (C).

8. Giả sử $V_k : A \mapsto B$ thì $OB = kOA \Rightarrow OB = |k|.OA$

$\Rightarrow |k| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \pm\dfrac{1}{2}$. Chọn (C).

9. Chọn (D).

10. Chọn (D).

11. Chọn (B).

12. $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$.

$V' = a'b'c' = k^3abc = k^3V$. Chọn (C).

13. Tổng diện tích các mặt của hình lập phương cạnh a bằng $6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4$.

Thể tích khối lập phương đó là $V = a^3 = 64$. Chọn (A).

14. Ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, 2a, 4a.

Thể tích hình hộp là $V = a.2a.4a = 8a^3 = 1728 \Rightarrow a = 6$. Chọn (D).

15. Gọi kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c.

Ta có $a^2 + b^2 = 5$, $b^2 + c^2 = 10$, $c^2 + a^2 = 13$.

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(5 + 10 + 13) = 14 \Rightarrow a^2 = 4,\ b^2 = 1,\ c^2 = 9.$$

Thể tích hình hộp là $V = abc = 1.2.3 = 6$. Chọn (C).

16. Chu vi đáy: $C = 80$

Diện tích đáy: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 180$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = Ch = 480$

Chiều cao lăng trụ: $h = \dfrac{480}{80} = 6$

Thể tích của khối lăng trụ: $V = S.h = 180.6 = 1080$. Chọn (C).

17. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (A′B′C′)

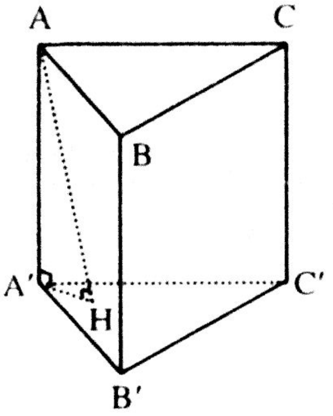
Ta có $\widehat{AA'H} = 30^0$; $AA' = 8$

$AH = AA'.\sin 30^0 = 4$

Diện tích đáy $S_{A'B'C'} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$

Thể tích khối lăng trụ là: $V = S.h = 84.4 = 336$

Chọn (B).



18. Tam giác A′B′C′ là tam giác đều cạnh a

Ta có $A'C' = a$, $B'D' = 2B'O' = a\sqrt{3} = A'C$

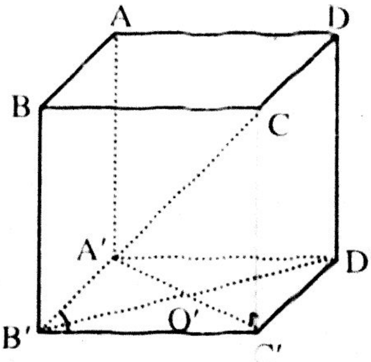
$$\Rightarrow CC' = \sqrt{A'C^2 - A'C'^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

Diện tích đáy $S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}A'C'.B'D' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích hình hộp là:

$$V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Chọn (D).



19. Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.

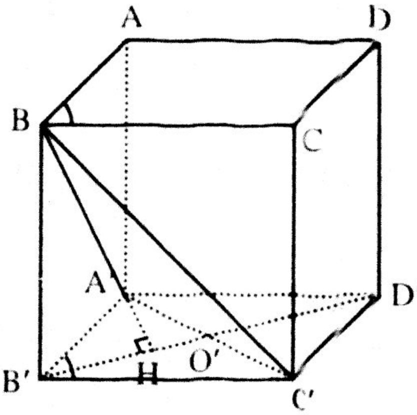
Ta có phương trình $(a + 2)^3 - a^3 = 98 \Leftrightarrow 3a^2 + 6a - 45 = 0 \Leftrightarrow a = 3$. Chọn (D).

20. $\Delta A'B'C'$ đều cạnh a

$$A'C' = a;\ B'D' = 2B'O' = a\sqrt{3}$$

Tương tự BA' = BC' = BB' = a

nên hình chiếu H của B trên mặt phẳng (A'B'C'D') là tâm của tam giác đều A'B'C'.



Ta có $BH = \sqrt{BB'^2 - B'H^2}$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}A'C'.B'D' = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

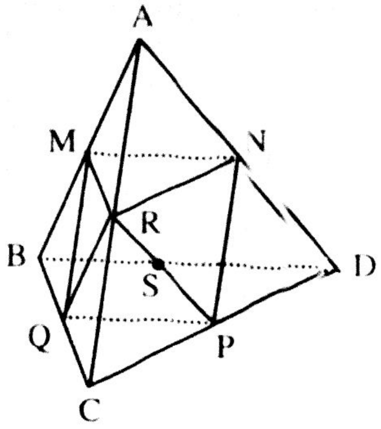
Thể tích hình hộp là: $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Chọn (B).

21. Theo lời giải bài 14a (trang 20 SGK) thì hình khối tám mặt đều có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối tám mặt đều bằng $V = 2V_{M.PQRS} = 2.\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{6}$.

Chọn (D).

22. Khối tám mặt đều đã cho có cạnh là $\frac{a}{2}$ và $RS = MP = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.



Thể tích khối tám mặt đều là:

$$V = 2.V_{R.MNPQ} = 2.\frac{1}{3}.\frac{RS}{2}.S_{MNPQ}$$

$$= 2.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$. Chọn (A).

23. Gọi $h_1, h_2, \ldots, h_{12}$ là khoảng cách từ điểm M nằm trong H đến các mặt của khối 12 mặt đều.

Ta có $V = \frac{1}{3}h_1.S + \frac{1}{3}h_2.S + \ldots + \frac{1}{3}h_{12}.S = \frac{1}{3}S(h_1 + h_2 + \ldots + h_{12})$

Suy ra $h_1 + h_2 + \ldots + h_{12} = \frac{3V}{S}$. Chọn (C).

24. Chiều cao của lăng trụ bằng: $h = \frac{1}{3}(19 + 20 + 37) = \frac{76}{3}$

Diện tích đáy $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 114$

Thể tích khối lăng trụ $V = S.h = \frac{76}{3}.114 = 2888$. Chọn (A).

25. Gọi H là hình chiếu của B′ trên mp(ABCD)

$B'H = BB'.\sin 45^0 = 10.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

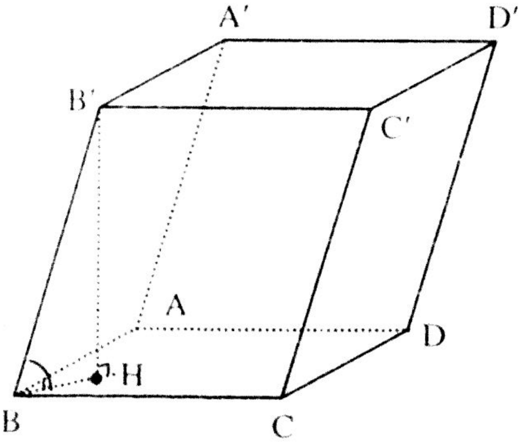
Diện tích đáy:

$S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = a^2\sin 45^0 = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$

Thể tích hình hộp

$V = S_{ABCD}.B'H = \left(18\sqrt{2}.5\sqrt{2}\right)$

V = 180. Chọn (B).

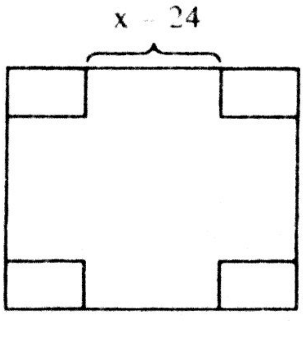


26. Gọi cạnh tấm bìa là x thì diện tích đáy hình hộp là $S = (x - 24)^2$.

Thể tích hình hộp là

$V = S.h = 12(x - 24)^2 = 4800$

$\Rightarrow$ x = 44 cm. Chọn (C).



27. Gọi H là tâm của tam giác đều ABC

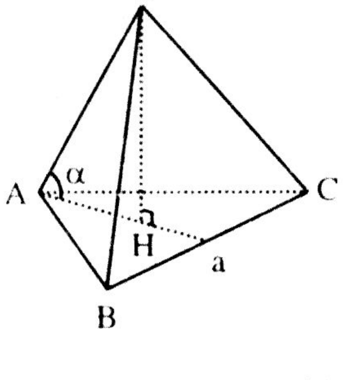
$SH \perp (ABC)$

$\tan\alpha = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan\alpha$

Thể tích hình chóp là:

$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan\alpha = \frac{a^3\tan\alpha}{12}$

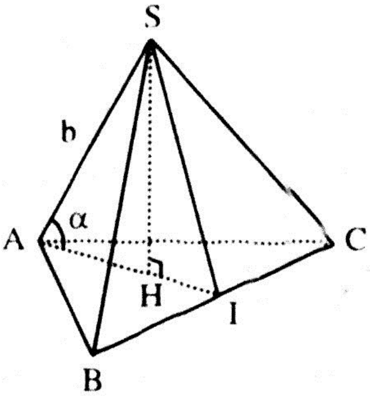
Chọn (B).



28. Gọi H là tâm của tam giác đều ABC, cạnh a

$SH \perp (ABC)$ và $\widehat{SAH} = \alpha$. I là trung điểm của BC. $AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông AHS ta có



$$\cos\alpha = \frac{AH}{SA} \Rightarrow b\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = b\sqrt{3}\cos\alpha$$

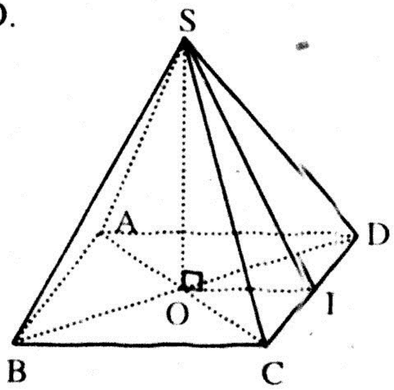
Diện tích tam giác ABC:

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\alpha$$

Mặt khác $SH = SA\sin\alpha = b\sin\alpha$

Thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. Chọn (B).

29. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, I là trung điểm CD.



$SO \perp (ABCD)$. $S_{ABCD} = 4 = CD^2 \Rightarrow CD = 2$

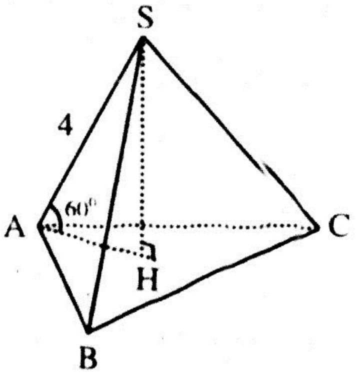
$S_{SCD} = \frac{1}{2}SI.CD = \sqrt{2} \Rightarrow SI = \sqrt{2}$

$SO^2 = SI^2 - OI^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1 \Rightarrow SO = 1$

$V_H = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{4}{3}$

Chọn (C).

30. Kẻ đường cao SH của hình chóp SABC



$$SH = SA.\sin60^0 = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Diện tích ΔABC:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 24$$

Thể tích của khối chóp là:

$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.24.2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$. Chọn (A).

31. Ta có V = B.h. Nếu cạnh đáy của đa giác đều tăng lên n lần thì diện tích đáy tăng lên n^2 lần, khi đó thể tích tăng lên n^3 lần. Chọn (C).

32. Ta có V = B.h. Nếu cạnh đáy của đa giác đều giảm đi n lần thì diện tích đáy giảm đi n^2 lần, khi đó thể tích giảm đi n lần. Chọn (D).

CHƯƠNG II MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa mặt cầu

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O bán kính bằng R, kí hiệu là S(O; R).

Vậy $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O; R), mp(P), gọi d là khoảng cách từ O đến (P), H là hình chiếu của O trên (P).

i) Nếu $d < R$ thì mp(P) cắt mặt cầu S(O; R) theo giao tuyến là đường tròn tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ nằm trong mp(P).

ii) Nếu $d = R$ thì (P) tiếp xúc với S(O; R) tại H.

iii) Nếu $d > R$ thì (P) không cắt S(O; R).

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O tới Δ.

- Nếu $d < R$ thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d = R$ thì Δ cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất.
- Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu.

Định lí: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O; R) thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó

a) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

b) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

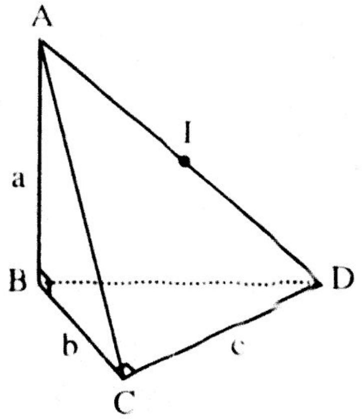
Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$.

Khối cầu bán kính R có thể tích là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Trong không gian cho ba đoạn thẳng AB, BC, CD sao cho* $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AB$. *Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Tính bán kính mặt cầu đó nếu* $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Giải



Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp (BCD)$

Suy ra $AB \perp BD$

Vì $CD \perp BC$ và $CD \perp AB$ nên $CD \perp (ABC)$

Suy ra $CD \perp AC$

Gọi I là trung điểm AD, ta có: $IB = IA = ID = IC$ nên các điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính AD.

Mặt khác ta có: $AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Do đó bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. *a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước.*

b) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước.

c) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua một đường tròn cho trước.

d) Có hay không một mặt cầu đi qua một đường tròn và một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn ?

Giải

a) I là tâm của mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi $IA = IB$. Vậy tập hợp của các mặt cầu đó là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

b) I là tâm của mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước khi và chỉ khi $IA = IB = IC$. Vậy:

+ Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+ Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là rỗng.

c) I là tâm của mặt cầu đi qua đường tròn (C) cho trước khi và chỉ khi I cách đều mọi điểm của đường tròn. Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn (C).

d) Gọi M là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn (C). Lấy điểm A nằm trên (C) và gọi I là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của MA. Khi đó, mặt cầu tâm I, bán kính $R = IA = IM$ là mặt cầu đi qua đường tròn (C) và đi qua điểm M.

3. *Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S). Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

a) Mọi mặt phẳng đi qua M đều cắt (S) theo một đường tròn.

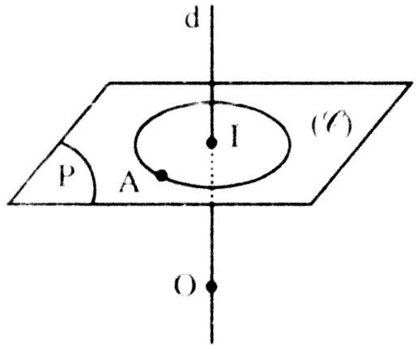
b) Mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Trả lời

Cả a) và b) đều đúng.

4. *Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định.*

Giải



Giả sử (S) là mặt cầu đi qua A và có tâm O nằm trên d. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d, (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có tâm I là giao điểm của (P) và d, có bán kính r = IA. Vậy đường tròn (C) cố định và mặt cầu (S) luôn luôn đi qua (C).

5. *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

a) Nếu hình đa diện nội tiếp mặt cầu thì mọi mặt của nó là đa giác nội tiếp đường tròn.

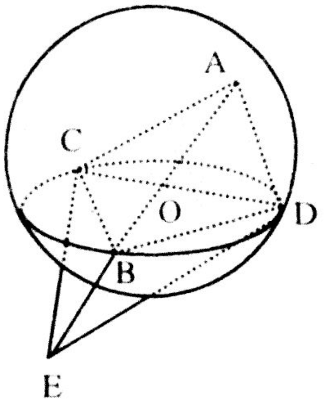
b) Nếu tất cả các mặt của một hình đa diện nội tiếp đường tròn thì đa diện đó nội tiếp mặt cầu.

Giải

a) Đúng vì mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn.

b) Không đúng, chẳng hạn:

Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (S)



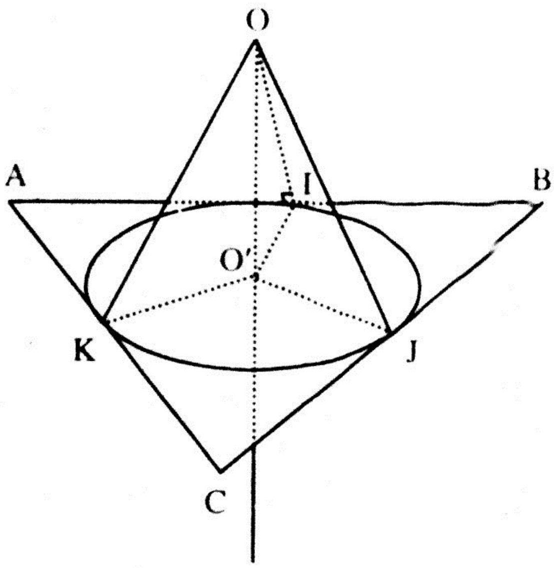
Lấy một điểm E nằm khác phía với A đối với mp(BCD) sao cho E không nằm trên (S). Xét hình đa diện ABCDE có sáu mặt là các tam giác ABC, ABD, ADC, EBC, ECD, EDB. Các mặt đó đều nội tiếp đường tròn nhưng hình đa diện ABCDE không nội tiếp mặt cầu.

Thật vậy, nếu có mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D, E thì nó phải đi qua A, B, C, D nên nó chính là mặt cầu (S), nhưng E lại không nằm trên (S), vô lí.

6. *a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.*

b) Chứng minh rằng nếu có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của hình tứ diện ABCD thì AB + CD = AC + BD = AD + BC.

Giải

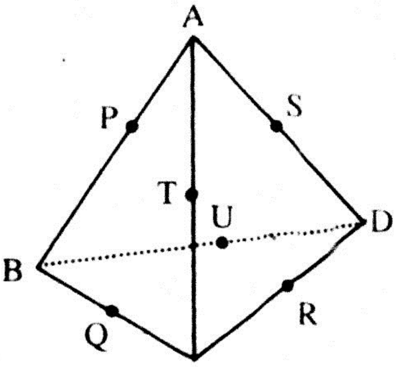


a) Mặt cầu tâm O tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt tại các điểm I, J, K khi và chỉ khi $OI \perp AB$, $OJ \perp BC$, $OK \perp CA$, $OI = OJ = OK$ (*)

Gọi O′ là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC) thì các điều kiện (*) tương đương với

$O'I \perp AB$, $O'J \perp BC$, $O'K \perp CA$, $O'I = O'J = O'K$, hay O′ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Từ đó suy ra tập hợp các điểm O là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABC



Giả sử mặt cầu (S) tiếp xúc với 6 cạnh AB, BC, CD, DA, AC, BD lần lượt tại P, Q, R, S, T, U. Ta cần chứng minh:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC$$

Theo tính chất của tiếp tuyến ta có:

$$\begin{aligned} AB + CD &= AP + PB + CR + RD \\ &= AT + BQ + CT + DU \\ &= (AT + TC) + (BU + UD) = AC + BD \end{aligned}$$

Vậy $AB + CD = AC + BD$

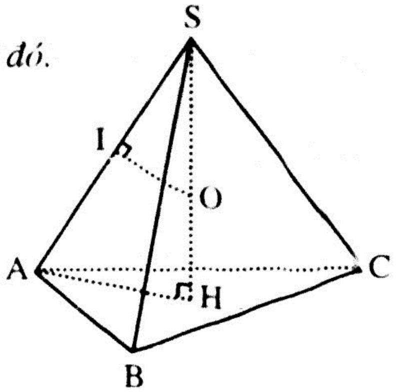
Chứng minh tương tự: $AC + BD = AD + BC$

Vậy $AB + CD = AC + BD = AD + BC$

7. *a) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.*

b) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi A′, B′, C′, D′ lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối cầu đó.

Giải



a) Gọi H là tâm của tam giác đều ABC.

SH là đường cao của hình chóp đều S.ABC nên SH là trục của tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAH) gọi O là giao điểm của đường trung trực SA với SH thì O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính của mặt cầu là R = SO.

Gọi I là trung điểm của SA thì tứ giác AHOI nội tiếp nên:

$$SO.SH = SI.SA \Rightarrow SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2h}$$

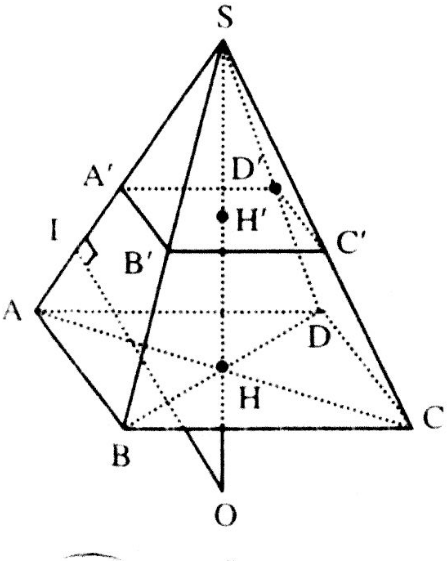
Mà $SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3}$

Từ đó suy ra $R = SO = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}$.

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là $V = \frac{\pi(a^2 + 3h^2)^3}{162h^3}$.

b) Gọi SH là đường cao của hình chóp đều S.ABCD thì H là tâm của hình vuông ABCD và SH đi qua tâm H′ của hình vuông A′B′C′D′.

Mọi điểm nằm trên SH đều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng cách đều bốn điểm A′, B′, C′, D′. Trên đường thẳng SH, ta xác định điểm O sao cho OA = OA′ thì O cách đều tám điểm A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, tức là tám điểm đó nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính R = OA. Điểm O là giao điểm của đường thẳng SH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA′.



Ta có $2a^2 = AC^2 = SA^2 + SC^2$

nên ΔSAC là tam giác vuông cân tại S suy ra $\widehat{ASO} = 45^0$ do đó ΔSIO vuông cân tại I và $IS = IO = \frac{3a}{4}$.

Từ đó suy ra $R = OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^3 = \frac{5\pi a^3\sqrt{10}}{24}$.

8. Cho tứ diện ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của hình tứ diện (nó được gọi là mặt cầu nội tiếp tứ diện).

Giải

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

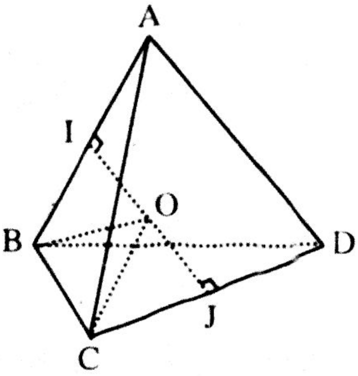
Ta có: $\Delta ABC = \Delta ABD$ (c.c.c)

suy ra CI = DI (hai trung tuyến tương ứng)

ΔCID cân tại I nên $IJ \perp CD$.

Tương tự $IJ \perp AB$. Gọi O là trung điểm IJ thì OA = OB và OC = OD.

Vì AB = CD = c nên hai tam giác vuông OIB và OJC bằng nhau, do đó OB = OC. Vậy O cách đều bốn đỉnh A, B, C, D. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm O bán kính R = OA.



Ta có: $OA^2 = OI^2 + AI^2 = \dfrac{IJ^2}{4} + \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{IJ^2 + c^2}{4}$

Vì CI là trung tuyến của tam giác ABC nên $CI^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$

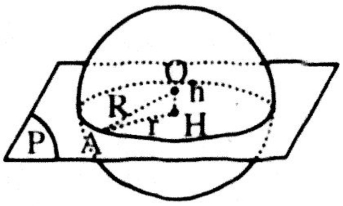
Suy ra $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

Như vậy $R^2 = OA^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

b) Các mặt của hình tứ diện là các tam giác bằng nhau (đều có ba cạnh bằng a, b, c) nên các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đó có bán kính r bằng nhau. Các đường tròn đó đều nằm trên mặt cầu (O; R) nên khoảng cách từ tâm O tới các mặt phẳng chứa các đường tròn đó bằng nhau và bằng $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

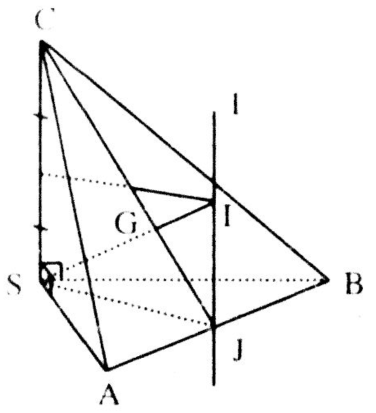
Vậy mặt cầu tâm O, bán kính h là mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

(OA = R, OH = h, HA = r)



9. *Tìm diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC biết rằng SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Chứng minh rằng các điểm S, trọng tâm tam giác ABC và tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC thẳng hàng.*

Giải



Gọi J là trung điểm của AB và Δ là đường thẳng qua J vuông góc với mp(SAB) thì Δ là trục của tam giác SAB (mọi điểm trên Δ đều cách đều S, A, B).

Gọi I là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực đoạn CS thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC có tâm I và bán kính R = IA. Ta có:

$$R^2 = IA^2 = AJ^2 + IJ^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{SC}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$

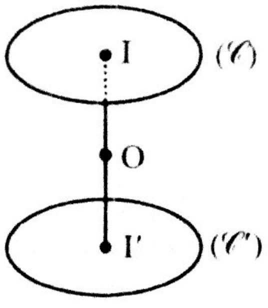
Vì SC // Δ nên SI cắt CJ tại G và $\frac{GJ}{GC} = \frac{IJ}{SC} = \frac{1}{2}$ nên G là trọng tâm tam giác ABC. Vậy S, G và tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp I thẳng hàng.

10. *a) Chứng minh rằng một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi nó là hình lăng trụ đứng với đáy là đa giác nội tiếp đường tròn.*

b) Trong số các hình hộp nội tiếp mặt cầu cho trước, hình hộp nào có diện tích toàn phần lớn nhất ?

Giải

a) Nếu $\mathcal{H}$ là hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp thì các mặt bên là những hình bình hành có đường tròn ngoại tiếp nên phải là hình chữ nhật. Vậy $\mathcal{H}$ là lăng trụ đứng. Ngoài ra, vì $\mathcal{H}$ có mặt cầu ngoại tiếp nên mặt đáy phải là đa giác có đường tròn ngoại tiếp.



Ngược lại, cho $\mathcal{H}$ là lăng trụ đứng có các đường tròn $(\mathcal{C})$ và $(\mathcal{C}')$ ngoại tiếp các đa giác đáy. Gọi I và I' là tâm của hai đường tròn đó thì II' là trục của cả hai đường tròn. Vì thế, nếu gọi O là trung điểm của đoạn thẳng II' thì O cách đều tất cả các đỉnh của hình lăng trụ đã cho. Vậy hình lăng trụ ấy có mặt cầu ngoại tiếp.

b) Nếu hình hộp $\mathcal{H}$ nội tiếp mặt cầu S(O; R) thì các mặt của $\mathcal{H}$ phải là những hình chữ nhật, vậy $\mathcal{H}$ là hình hộp chữ nhật mà O là giao điểm của các đường chéo và độ dài đường chéo là d = 2R. Gọi x, y, z là ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó thì $x^2 + y^2 + z^2 = d^2 = 4R^2$.

Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp thì ta có:

$$S = 2xy + 2yz + 2zx \le (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) = 8R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $8R^2$ khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, khi đó $\mathcal{H}$ là hình lập phương.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Ba cạnh của một tam giác có độ dài 13, 14, 15. Một mặt cầu có bán kính 5 tiếp xúc với ba cạnh tại các tiếp điểm nằm trên ba cạnh đó. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa tam giác.*
2. *Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.*
3. *Hình chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*
4. *Một hình chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Chứng minh rằng hình chóp đó có mặt cầu ngoại tiếp. Xác định tâm và bán kính mặt cầu đó.*

§2. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

(Học sinh xem sách giáo khoa)

§3. MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa hình tròn xoay, mặt tròn xoay

Cho hình $\mathcal{H}$ và đường thẳng Δ. Hình gồm tất cả các đường tròn $(\mathcal{C}_M)$ với $M \in \mathcal{H}$ được gọi là hình tròn xoay sinh bởi $\mathcal{H}$ khi quay quanh Δ, Δ gọi là trục của hình tròn xoay. Khi $\mathcal{H}$ là một đường thì hình tròn xoay sinh bởi nó gọi là mặt tròn xoay.

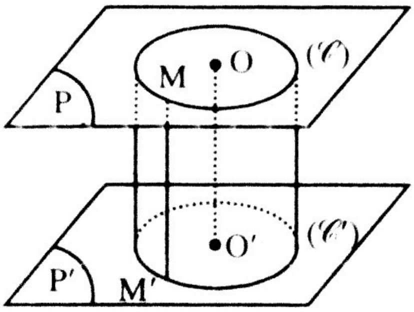
2. Định nghĩa mặt trụ

Cho đường thẳng Δ và đường thẳng $l \parallel \Delta$ cách Δ một khoảng bằng R. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh Δ được gọi là mặt trụ tròn xoay.

Δ gọi là *trục* của mặt trụ, l gọi là *đường sinh* của mặt trụ và R gọi là *bán kính* của mặt trụ.

3. Hình trụ và khối trụ

Cắt mặt trụ C trục Δ, bán kính R bởi hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P′) cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$.



Phần mặt trụ C nằm giữa hai mp(P) và (P′) cùng với hai hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ được gọi là hình trụ.

Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là ***khối trụ.***

4. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ

– Diện tích xung quanh của hình trụ bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$S_{xq} = C.h \text{ (C là chu vi đáy, h là chiều cao)}$$

– Thể tích của khối trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = S_đ.h$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

11. *Chứng minh rằng hình tròn xoay có vô số mặt phẳng đối xứng.*

Giải

Xét mặt tròn xoay $\mathscr{H}$ có trục là Δ. Mọi mặt phẳng (P) đi qua Δ đều là mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$. Thật vậy, nếu $M \in \mathscr{H}$ và M′ là điểm đối xứng với M qua mp(P) thì M′ cũng nằm trên đường tròn (C_M) nên $M' \in \mathscr{H}$.

12. *Trong mỗi trường hợp sau, gọi tên hình tròn xoay :*

a) Sinh bởi ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

b) Sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

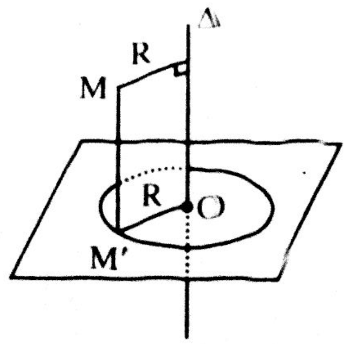
Giải

a) Hình trụ

b) Khối trụ

13. *Cho đường tròn (O ; R) nằm trong mặt phẳng (P). Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho hình chiếu của chúng trên (P) luôn nằm trên đường tròn đã cho.*

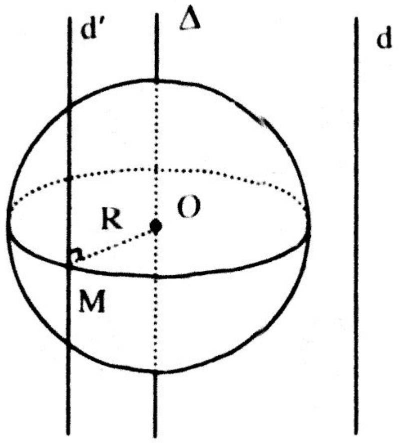
Giải



Gọi Δ là trục của đường tròn (O; R). Hình chiếu M' của M nằm trên (O; R) thì MM' // Δ và khoảng cách từ M tới Δ bằng M'O = R.

Vậy tập hợp các điểm M là mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.

14. *Chứng minh rằng các tiếp tuyến của mặt cầu song song với một đường thẳng cố định luôn nằm trên một mặt trụ xác định.*



Giải

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng d

Gọi Δ là đường thẳng đi qua O và song song với d. Nếu *l* là tiếp tuyến của mặt cầu và *l* // d thì *l* cách Δ một khoảng không đổi R. Vậy *l* nằm trên mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.

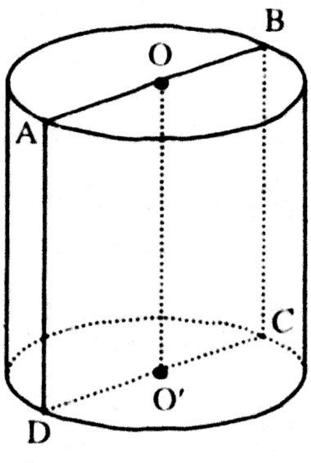
15. *Mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh 2R.*

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ.

c) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

Giải



Mặt phẳng đi qua trục OO' của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông ABCD cạnh 2R, do đó bán kính đáy bằng R và đường sinh AD = 2R.

a) Ta có $S_{xq} = 2\pi.R.2R = 4\pi R^2$

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

b) Thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$

c) Hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp $\mathcal{T}$ là hình lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 2R và có đáy là hình vuông cạnh $R\sqrt{2}$ nên có thể tích $V_{LT} = 2R^2.2R = 4R^3$.

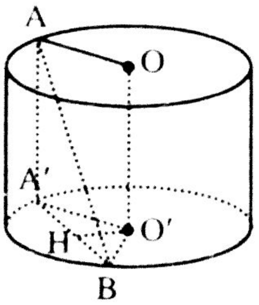
16. *Một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao $R\sqrt{3}$.*

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc *giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.*

Giải



a) Diện tích xung quanh của hình trụ

$S_{xq} = 2\pi.R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2 = 2(\sqrt{3} + 1)\pi R^2$

b) Thể tích của khối trụ: $V = \pi R^2.R\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi R^3$

c) Gọi O, O' là tâm của hai đường tròn đáy kẻ AA' // OO' (A' nằm trên đáy dưới hình trụ)

Ta có $O'A' = R$, $AA' = R\sqrt{3}$ và $\widehat{BAA'} = 30^0$

Vì OO' // mp(ABA') nên khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách giữa OO' và mp(ABA'). Kẻ $O'H \perp A'B$ thì H là trung điểm A'B và $O'H \perp$ mp(ABA')

Trong tam giác vuông AA'B ta có:

$$\tan 30^0 = \frac{A'B}{AA'} \Rightarrow A'B = AA'\tan 30^0 = R\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = R$$

Vậy $\Delta BA'O'$ đều cạnh R do đó $O'H = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Một hình trụ có diện tích xung quanh là S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a.*

a) Tính thể tích khối trụ ;

b) Tính diện tích thiết diện qua trục của hình trụ.

Đáp số: *a)* $V = Sa$ *b)* $\dfrac{S}{\pi}$

2. *Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F' có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h.*

a) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ nội tiếp hình lăng trụ.

Đáp số: *a)* $\pi a^2 h$ *b)* $\dfrac{3}{4}\pi a^2 h$.

3. *Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông diện tích xung quanh bằng* 4π.

a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ.

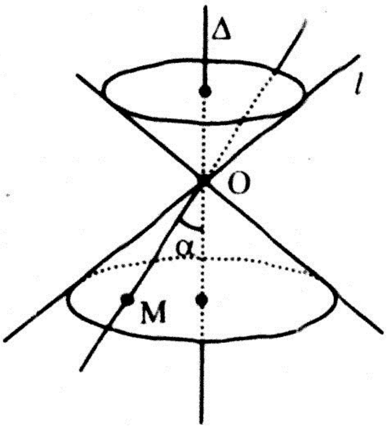
c) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ.

Đáp số: *a)* 6π *b)* 2π *c)* $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

§4. MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa mặt nón



Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ

Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là ***mặt nón tròn xoay*** *(hay đơn giản là mặt nón).*

Δ gọi là *trục* của mặt nón. l gọi là *đường sinh* của mặt nón. O gọi là *đỉnh* của mặt nón.

Nếu gọi α là góc giữa l và Δ thì 2α gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón ($0^0 < 2\alpha < 180^0$).

2. Hình nón và khối nón

Cho mặt nón $\mathfrak{N}$ trục Δ, đỉnh O, (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại I ≠ 0 thì (P) cắt $\mathfrak{N}$ theo đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm I, mp(P′) vuông góc với Δ tại O

Phần mặt nón $\mathfrak{N}$ giới hạn bởi (P) và (P′) trùng với hình tròn ($\mathscr{C}$) được gọi là hình nón.

- M ∈ ($\mathscr{C}$) thì OM gọi là đường sinh.
- OI là chiều cao hình nón.

Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

3. Diện tích hình nón và thể tích khối nón

a) Diện tích xung quanh của hình nón bằng một phần hai tích độ dài đường tròn đáy với độ dài đường sinh.

Gọi R là bán kính đáy và l là đường sinh hình nón thì $S_{xq} = \pi R.l$

b) Thể tích khối nón bằng một phần ba tích diện tích hình tròn đáy và chiều cao.

Gọi R là bán kính đáy và h là chiều cao hình nón thì $V = \frac{1}{3}\pi R^2.h$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

17. *Trong mỗi trường hợp sau, hãy gọi tên hình tròn xoay :*

a) Sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

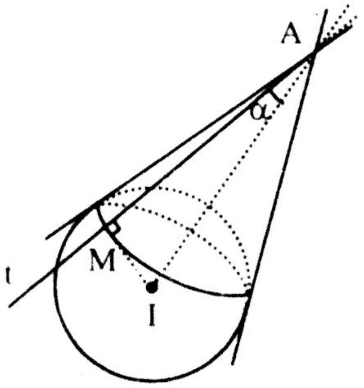
b) Sinh bởi một tam giác vuông (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

Trả lời

a) Hình nón　　　　b) Khối nón

18. *Cho điểm A nằm ngoài mặt cầu S. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A tiếp xúc với mặt cầu S luôn nằm trên một mặt nón xác định.*

Giải



Giả sử At là một tiếp tuyến của mặt cầu S(I; R) với tiếp điểm là M. Khi đó, nếu gọi Δ là đường thẳng AI và α là góc giữa đường thẳng At và Δ thì $\alpha = \widehat{MAI}$.

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{MI}{IA} = \dfrac{R}{IA}$, suy ra góc α không đổi. Vậy At là đường sinh của mặt nón $\mathcal{N}$ có đỉnh A, trục Δ và góc ở đỉnh bằng 2α.

19. *Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp một hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh của hình nón và đi qua đường tròn đáy của hình nón. Hình nón như vậy gọi là nội tiếp mặt cầu đó.*

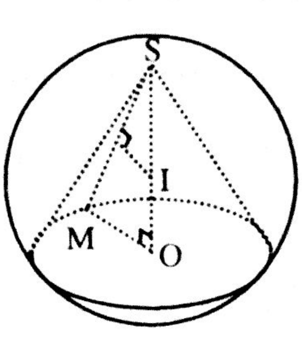
a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. .Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó.

c) Cho hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính R. Nếu hình nón đó có chiều cao bằng h thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu ? Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

Giải

a) Cho hình nón $\mathcal{N}$ có đỉnh S và đường tròn đáy là (O; r). Lấy điểm M trên (O; r) thì ΔSOM vuông tại O.



SO là trục của đường tròn (O; r) nên I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình nón khi và chỉ khi I thuộc SO và cách đều hai điểm S, M. Vậy I là giao điểm của SO với mặt phẳng trung trực SM. Mặt cầu tâm I bán kính R = IS là mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.

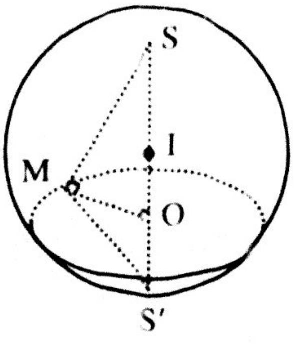
b) Kẻ đường kính SS′ của mặt cầu ngoại tiếp hình nón (SS′ > h)

ΔMSS′ vuông tại M có đường cao MO = r

Ta có:

$$MO^2 = OS.OS' \Rightarrow r^2 = h(SS' - h)$$

$$\Rightarrow SS' = \frac{r^2}{h} + h = \frac{r^2 + h^2}{h}$$



Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = \frac{1}{2}SS' = \frac{r^2 + h^2}{2h}$

c) Nếu hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r nội tiếp mặt cầu bán kính R thì theo câu b), ta có hệ thức $r^2 = h(2R - h)$.

Vậy $r = \sqrt{h(2R - h)}$

Độ dài đường sinh $l = SM = \sqrt{SO.SS'} = \sqrt{2R.h}$

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi r l = \pi\sqrt{h(2R - h)}\,.\sqrt{2Rh} = \pi h\sqrt{2R(2R - h)}$$

20. *Một mặt cầu gọi là nội tiếp hình nón nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón. Khi đó hình nón được gọi là ngoại tiếp mặt cầu.*

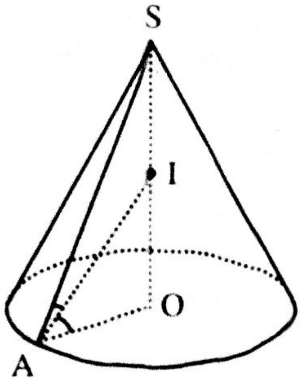
a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có một mặt cầu nội tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón đó.

Giải

a) Cho hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn (O; r)

Tâm I của mặt cầu nội tiếp hình nón nằm trên SO. Lấy A cố định trên (O; r) thì I là giao điểm của SO với đường phân giác trong góc A của ΔSAO. I hoàn toàn xác định và là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón, bán kính mặt cầu là R = IO.



b) Ta có $SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{IO + IS} = \frac{OA}{OA + SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{r}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$$

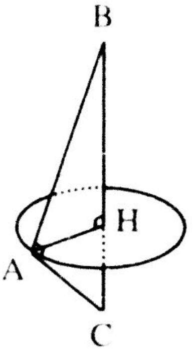
Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $R = IO = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$.

21. *Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng BC.*

Giải

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$



Hai tam giác ABH và ACH khi quay quanh BC lần lượt tạo thành hai khối nón $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ có thể tích lần lượt là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH;\ V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2.CH$$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ABC khi quay quanh BC là

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi.AH^2(BH + CH) = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC$$

$$= \frac{1}{3}.\pi\frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.*

   a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

   b) Tính thể tích của khối nón tương ứng.

   c) Một thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích của thiết diện này.

   Đáp số:

   a) $S_{xq} = \pi\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$; $S_{tp} = \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{2}a^2$; b) $V = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$; c) $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

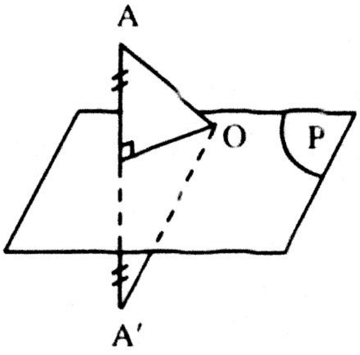
2. *Cho hình nón có bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và đáy của hình nón bằng α. Mặt phẳng (P) song song với đáy hình nón, cách đáy một khoảng h và cắt hình nón theo đường tròn ($\mathcal{C}$).*

   a) Tính bán kính đường tròn theo R, h, α.

   b) Tính diện tích và thể tích phần hình nón nằm giữa đáy hình nón và mp(P).

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho mp(P) và điểm A không thuộc (P). Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên (P) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

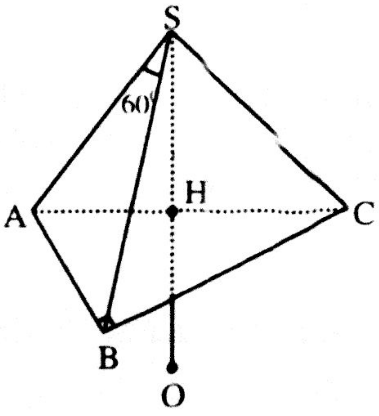


Giải

Lấy O nằm trên mp(P). Gọi (S) là mặt cầu đi qua A có tâm là O

Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua mp(P) ta có OA′ = OA = R nên (S) đi qua A′. Vậy mặt cầu (S) luôn đi qua hai điểm cố định A và A′.

2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, biết $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^0$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{CSA} = 120^0$.



Giải

Áp dụng định lí cosin trong các tam giác SAB, SAC ta có

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SASB\cos60^0$$

$$= a^2 + b^2 - 2a^2.\frac{1}{2} = a^2 \Rightarrow AB = a$$

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC\cos120^0$$

$$= a^2 + a^2 + 2a^2.\frac{1}{2} = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông SBC ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên ΔABC vuông tại B

Gọi H là trung điểm của AC thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì SA = SB = SC nên $SH \perp mp(ABC)$

và $SH^2 = SC^2 - HC^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$

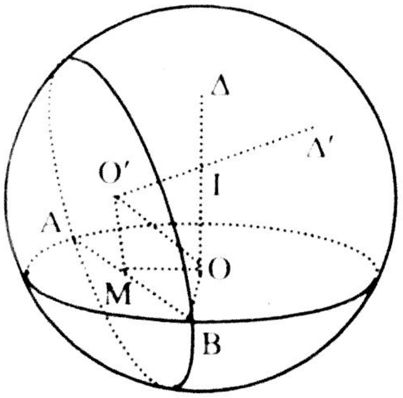
Gọi O là điểm đối xứng của S qua H thì SO = OA = OB = OC = a nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm O và bán kính R = a.

3. Cho hai đường tròn (O ; r) và (O′ ; r′) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P′).

a) Chứng minh rằng có mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn đó.

b) Tính bán kính R của mặt cầu (S) khi $r = 5$, $r' = \sqrt{10}$, $AB = 6$, $OO' = \sqrt{21}$.

Giải



a) Gọi M là trung điểm AB ta có OM ⊥ AB và O'M ⊥ AB suy ra AB ⊥ mp(OO'M)

Gọi Δ, Δ' lần lượt là trục của đường tròn (O; r) và (O', r') thì AB ⊥ Δ và AB ⊥ Δ' do đó Δ, Δ' cùng nằm trong mp(OO'M)

Gọi I là giao điểm của Δ và Δ' thì I là tâm mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn (O; r) và (O'; r') và (S) có bán kính R = IA.

b) Ta có $MA = MB = 3;\ OA = r = 5;\ O'A = r' = \sqrt{10}$

Do đó $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{25-9} = 4$

$$O'M = \sqrt{OA'^2 - AM^2} = \sqrt{10-9} = 1$$

Áp dụng định lí cosin trong $\Delta OMO'$ ta có

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M.\cos\widehat{OMO'}$$

$$\Rightarrow \quad 21 = 16 + 1 - 2.4.1.\cos\widehat{OMO'} \Rightarrow \cos\widehat{OMO'} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{OMO'} = 120^0 \text{ và } \widehat{OIO'} = 60^0$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OMO' ta có:

$$MO^2 = MO'^2 + OO'^2 - 2MO'.OO'.\cos\widehat{MO'O}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{MO'O} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \sin\widehat{OO'I} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

(Vì $\widehat{MO'O} + \widehat{OO'I} = 90^0$)

Áp dụng định lí sin trong tam giác OIO' ta có:

$$\frac{OI}{\sin\widehat{OO'I}} = \frac{OO'}{\sin\widehat{OIO'}} \Rightarrow \frac{OI}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow OI = 2\sqrt{3}$$

Vậy $R = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{25+12} = \sqrt{37}$.

4. *Cho một hình nón $\mathcal{N}$ sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao của tam giác đó.*

a) Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón $\mathcal{N}$ thì có bán kính bằng bao nhiêu ?

b) Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón $\mathcal{N}$ thì có bán kính bằng bao nhiêu ?

Giải

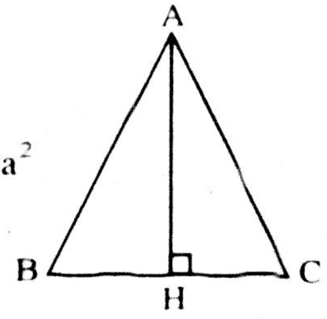
Hình nón $\mathfrak{N}$ có bán kính đáy $r = BH = \frac{a}{2}$, chiều cao $h = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

và đường sinh $l = AB = a$

Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đ} = \pi r l + \pi r^2 = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2$$

Thể tích $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$



a) Nếu mặt cầu có bán kính R thì diện tích bằng $4\pi R^2$ nên

$$4\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

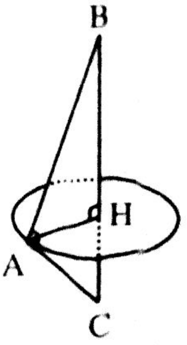
b) Nếu khối cầu có bán kính R thì thể tích bằng

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ nên } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3 \Rightarrow R = \frac{\sqrt[6]{12}}{4}a$$

5. *Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích các khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi lần lượt quay quanh AB, AC, BC.*

a) Tính V_1, V_2, V_3 theo b, c. *b) Chứng minh rằng* $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.

Giải



a) Khi quay ΔABC quanh AB ta được khối nón có chiều cao AB = c và bán kính đáy AC = b nên có thể tích $V_1 = \frac{1}{3}\pi c.b^2$

Tương tự khi quay ΔABC quanh AC ta được khối nón có thể tích $V_2 = \frac{1}{3}\pi b.c^2$.

Gọi AH là đường cao của ΔABC. Khi quay ΔABC quanh BC ta được hai khối nón sinh bởi hai tam giác ABH và ACH.

Khi đó ta có $V_3 = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BH + \frac{1}{3}.\pi.AH^2.CH$

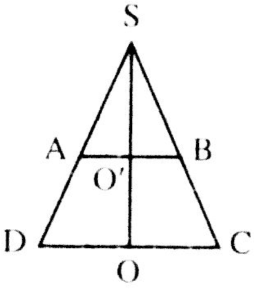
$$= \frac{1}{3}\pi.AH.BC = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2.\sqrt{b^2+c^2} = \frac{1}{3}.\frac{\pi b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

b) Ta có: $\dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{9(b^2+c^2)}{\pi b^4c^4}$

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi c^2b^4} + \frac{9}{\pi b^2c^4} = \frac{9(b^2+c^2)}{\pi b^4c^4} = \frac{1}{V_3^2}$$

6. *Một hình thang cân ABCD có các cạnh đáy AB = 2a, DC = 4a, cạnh bên AD = BC = 3a. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn xoay sinh bởi hình thang đó khi quay quanh trục đối xứng của nó.*

Giải



Gọi S là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC của hình thang. Đường cao SO của tam giác cân SCD là trục đối xứng của hình thang, do đó SO cắt AB tại trung điểm O' của AB.

Khi quay quanh SO, tam giác SCD sinh ra khối nón $\mathcal{N}_1$ có thể tích V_1, tam giác SAB sinh ra khối nón $\mathcal{N}_2$ có thể tích V_2, còn hình thang ABCD sinh ra một khối tròn xoay $\mathcal{H}$ có thể tích $V = V_1 - V_2$.

Vì $AB = \dfrac{1}{2}CD$ nên AB là đường trung bình của ΔSCD nên $SB = 3a$.

Ta có $SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}\,a$

$$SO = 2SO' = 4\sqrt{2}\,a$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi.OC^2.SO - \frac{1}{3}\pi.O'B^2.SO' = \frac{1}{3}\pi.4a^2.SO - \frac{1}{3}\pi a^2.SO'$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2(4SO - SO') = \frac{1}{3}\pi a^2(16\sqrt{2}\,a - 2\sqrt{2}\,a) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$$

Diện tích xung quanh của khối tròn xoay $\mathcal{H}$ là

$$S_{xq} = S_1 - S_2 = \pi OC.SC - \pi.O'B.SB = 9\pi a^2$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{d_1} + S_{d_2} = 9\pi a^2 + \pi a^2 + 4\pi a^2 = 14\pi a^2$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

(A) Mọi hình hộp có mặt cầu ngoại tiếp.

(B) Mọi hình hộp đứng có mặt cầu ngoại tiếp.

(C) Mọi hình hộp có một mặt bên vuông góc với đáy đều có mặt cầu ngoại tiếp.

(D) Mọi hình hộp chữ nhật có mặt cầu ngoại tiếp.

2. *Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R thì*

(A) Hình hộp có đáy là hình vuông có thể tích lớn nhất.

(B) Hình lập phương có thể tích lớn nhất.

(C) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số cộng công sai khác 0 có thể tích lớn nhất.

(D) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số nhân công bội khác 1 có thể tích lớn nhất.

3. *Một hình cầu có thể tích* $\frac{4}{3}\pi$ *ngoại tiếp một hình lập phương. Trong các số sau đây, số nào là thể tích khối lập phương ?*

(A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; *(B)* $\frac{8}{3}$; *(C)* 1 ; *(D)* $2\sqrt{3}$.

4. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

(A) Hình chóp có đáy là tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp.

(B) Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp

(C) Hình chóp có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp.

(D) Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

5. *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M sao cho* $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ *là*

(A) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(B) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$;

(C) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(D) Đường tròn với tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

6. *Bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều ABCD cạnh bằng a là*

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; *(B)* $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; *(C)* $a\sqrt{2}$; *(D)* $2a\sqrt{2}$.

7. *Trong số các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

(A) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau.

(B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng song song.

(C) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau.

(D) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

8. *Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp các điểm M sao cho diện tích tam giác MAB không đổi là*

(A) Hai đường thẳng song song ; *(B) Một mặt cầu ;*

(C) Một mặt trụ ; *(D) Một mặt nón.*

9. *Cho hai điểm phân biệt A, B cố định và phân biệt. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng* $\frac{AB}{2}$*. Gọi H là hình chiếu của B trên l. Tập hợp điểm H là*

(A) Một mặt phẳng ; *(B) Một mặt trụ ;*

(C) Một mặt nón ; *(D) Một đường tròn.*

10. *Với điểm O cố định thuộc mặt phẳng (P) cho trước, xét đường thẳng l thay đổi đi qua O và tạo với (P) góc* 30^0*. Tập hợp các đường thẳng l trong không gian là*

(A) Một mặt phẳng ; *(B) Hai đường thẳng ;*

(C) Một mặt trụ ; *(D) Một mặt nón.*

11. *Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, đường cao* $OO' = a\sqrt{3}$*. Một đoạn thẳng AB thay đổi sao cho góc giữa AB và trục hình trụ bằng* 30^0*, A, B thuộc hai đường tròn đáy của hình trụ. Tập hợp trung điểm I của AB là*

(A) Một mặt trụ ; *(B) Một mặt cầu ;*

(C) Một đường tròn ; *(D) Một mặt phẳng.*

12. *Trong mặt phẳng (P) cho góc xOy. Một mặt phẳng (Q) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy, cắt Ox, Oy tại A, B. Trong (Q) lấy điểm M sao cho* $\widehat{AMB} = 90^0$*. Khi ấy, tập hợp điểm M là :*

(A) Một đường tròn ; *(B) Một mặt trụ ;*

(C) Một mặt nón ; *(D) Một mặt cầu.*

13. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh bởi đường gấp khúc AC'A' khi quay quanh AA' bằng:*

(A) $\pi a^2\sqrt{6}$; *(B)* $\pi a^2\sqrt{3}$; *(C)* $\pi a^2\sqrt{2}$; *(D)* $\pi a^2\sqrt{5}$.

14. *Cho hình nón có bán kính đáy bằng a. Một dây cung thay đổi của đường tròn đáy có độ dài không đổi bằng a. Tập hợp các trung điểm của đoạn thẳng nối đỉnh hình nón với trung điểm của dây cung đó là :*

(A) Một mặt nón cố định ; *(B) Một mặt phẳng cố định ;*

(C) Một mặt trụ cố định ; *(D) Một đường tròn cố định.*

15. *Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao OO'. Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng* (α) *vuông góc với đáy và cách điểm O một khoảng h cho trước* $(h < R)$*. Khi ấy, mp*(α) *có tính chất :*

(A) Luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định ;

(B) Luôn cách một mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng h ;

(C) Cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông ;

(D) Cả ba tính chất trên đều sai.

16. *Một khối trụ có bán kính* $a\sqrt{3}$*, chiều cao* $2a\sqrt{3}$*. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ là :*

(A) $8\sqrt{6}\,\pi a^3$; *(B)* $6\sqrt{6}\,\pi a^3$; *(C)* $\frac{4}{3}\sqrt{6}\,\pi a^3$; *(D)* $4\sqrt{3}\,\pi a^3$.

17. *Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là :*

(A) $\sqrt{3}$; *(B)* $2\sqrt{3}$; *(C)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *(D)* $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

18. *Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính là*

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; *(B)* $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; *(C)* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; *(D)* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

19. *Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng*

(A) $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}$; *(B)* $\frac{a\sqrt[3]{3}}{8}$; *(C)* $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{8}$; *(D)* $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{2}$.

20. *Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng* 90^0*. Cắt hình nón bằng một mặt phẳng* (α) *đi qua đỉnh sao cho góc giữa* (α) *và mặt đáy hình nón bằng* 60^0*. Khi đó diện tích thiết diện là*

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$; *(B)* $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; *(C)* $\frac{2}{3}a^2$; *(D)* $\frac{3}{2}a^2$

21. *Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt đáy góc* 60^0*. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là*

(A) $\frac{3\pi a^2}{2}$; *(B)* $\frac{3\pi a^2}{4}$; *(C)* $\frac{3\pi a^2}{6}$; *(D)* $\frac{3\pi a^2}{8}$.

22. *Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao 2R. Tỉ số thể tích khối cầu và khối trụ là*

(A) $\frac{2}{3}$; *(B)* $\frac{3}{2}$; *(C)* 2 ; *(D)* $\frac{1}{2}$.

23. *Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, mp(ABCD) không vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ. Diện tích hình vuông đó là*

(A) $\frac{5R^2}{2}$; *(B)* $5R^2$; *(C)* $\frac{5R^2\sqrt{2}}{2}$; *(D)* $5R^2\sqrt{2}$.

24. *Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là a, b, c. Thể tích của khối trụ là*

(A) $\frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$; *(B)* $\frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a$; *(C)* $\frac{1}{4}\pi(c^2 + a^2)b$;

(D) $\frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$ *hoặc* $\frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a$ *hoặc* $\frac{1}{4}\pi(c^2 + a^2)b$.

25. *Một khối tứ diện đều có cạnh a nội tiếp một khối nón. Thể tích khối nón là*

(A) $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi a^3$; *(B)* $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$; *(C)* $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$; *(D)* $\frac{\sqrt{6}}{9}\pi a^3$.

26. *Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng 120°. Trên đường tròn đáy, lấy một điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí của M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất ?*

(A) Có 1 vị trí ; (B) Có 2 vị trí ; (C) Có 3 vị trí ; (D) Có vô số vị trí.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Hình bình hành nội tiếp đường tròn phải là hình chữ nhật. Chọn (D).

2. Hình hộp nội tiếp một mặt cầu là hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = 2R$. Gọi x, y, z là các kích thước của hình hộp chữ nhật.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = d^2 = 4R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$4R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{V^2} \Rightarrow V^2 \leq \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3$$

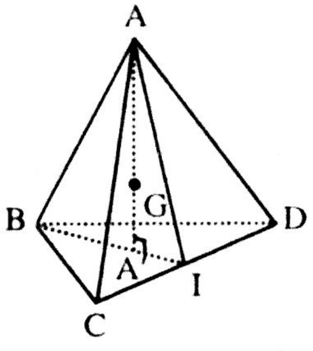
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = y = z$. Chọn (B).

3. Giả sử bán kính mặt cầu là R và cạnh hình lập phương là a thì thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 1$ và $4R^2 = 3a^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Thể tích khối lập phương là $a^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Chọn (A).

4. Hình chóp có đáy là tứ giác có mặt cầu ngoại tiếp thì đáy phải là tứ giác nội tiếp đường tròn. Chọn (D).

5. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, AA' là đường cao xuất phát từ A của tứ diện ABCD. Ta có



$$AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad GA = GB = GC = GD = \frac{3}{4}.AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

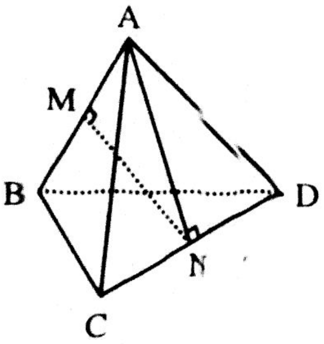
Ta có: $\quad MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$

$$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GM})^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4GA^2 + 4GM^2 - 2\overrightarrow{GM}\,(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad MG^2 = \frac{a^2}{2} - GA^2 = \frac{a^2}{8} \Rightarrow MG = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G bán kính $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Chọn (B).



6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện đều ABCD.

I là trung điểm của MN thì I cách đều 6 cạnh tứ diện nên I là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều.

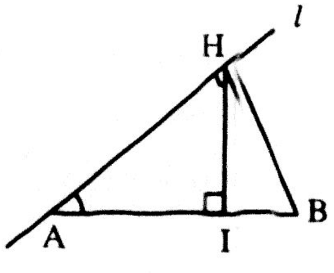
Bán kính mặt cầu là $R = \frac{MN}{2}$.

Ta có $\quad MN^2 = AN^2 - MA^2 = AD^2 - ND^2 - MA^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ chọn (B).}$$

7. Xem lời giải bài 3 ôn tập chương II SGK. Chọn (D).

8. Tập hợp các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến AB không đổi. Chọn (C).



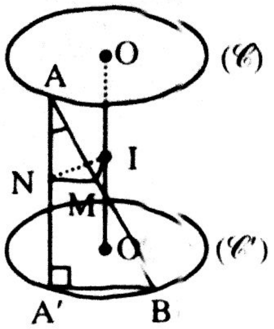
9. $\sin\widehat{HAB} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAB} = 30^0$

Tập hợp l là mặt nón có trục AB, đường sinh l, góc ở đỉnh là 60^0. Gọi I là hình chiếu H lên AB

Ta có: $BI = BH.\cos 60^0 = \frac{AB}{4} \Rightarrow$ I cố định

$\Rightarrow$ H thuộc mặt phẳng qua I vuông góc với AB. Vậy tập hợp H là đường tròn. Chọn (D).

10. Chọn (D).



11. Gọi A′ là hình chiếu của A xuống mặt phẳng đáy thì AA′ = OO′. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của OO′, AB và AA′.

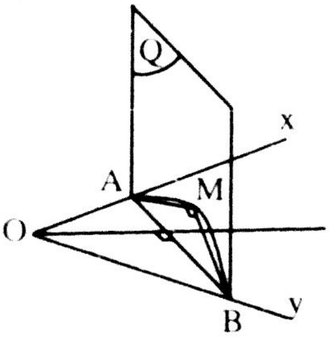
Ta có: IA = IB nên IM ⊥ AB

Mp(IMN) qua I và song song với hai mặt phẳng đáy.

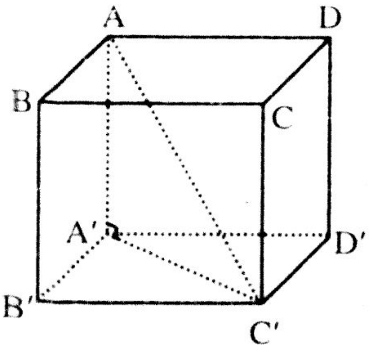
Ta có: $MN = AN.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \quad MI = \sqrt{NI^2 - MN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy tập hợp trung điểm M của AB là đường tròn tâm I bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nằm trong mp(IMN). Chọn (C).



12. Tập hợp M là một mặt nón đỉnh O. Chọn (C).

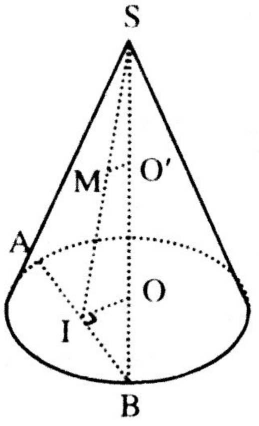


13. Hình nón tròn xoay sinh bởi đường gấp khúc AC'A' khi quay quanh AA' có bán kính đáy $A'C' = a\sqrt{2}$ và độ dài đường sinh $AC' = a\sqrt{3}$ nên diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.2\pi.a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \pi a^2\sqrt{6}.$$

Chọn (A).

14. Gọi I là trung điểm AB ta có $OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Tập hợp I là đường tròn tâm O bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trong mặt phẳng đáy hình nón. Gọi O' là trung điểm SO và M là trung điểm SI thì $MO' = \frac{1}{2}OI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

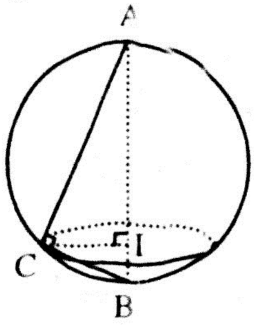
Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O' bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ nằm trong mặt phẳng qua O' và song song với mặt phẳng đáy. Chọn (D).

15. mp(α) luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định đường cao OO', bán kính đáy h. Chọn (A).

16. Đường kính khối cầu ngoại tiếp khối trụ là

$$d = 2R = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a\sqrt{3})^2} = 2a\sqrt{6} \Rightarrow R = a\sqrt{6}$$

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi.(a\sqrt{6})^3 = 8\pi a^3\sqrt{6}$. Chọn (A).



17. Gọi AB là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón, I là tâm đường tròn đáy của hình nón $AI = \sqrt{AC^2 - CI^2} = \sqrt{3}$

ΔABC vuông tại C nên

$$AC^2 = AI.AB \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AI} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ (Chọn (D)).

18. Diện tích toàn phần hình nón là:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi.r.l + \pi r^2 = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{4} = \pi a^2.\frac{3}{4}$$

Diện tích mặt cầu bán kính R là $4\pi R$

Suy ra $4\pi R^2 = \pi a^2\frac{3}{4} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Chọn (A).

19. (Xem bài 4 b, ôn tập chương II). Chọn (A).

20.

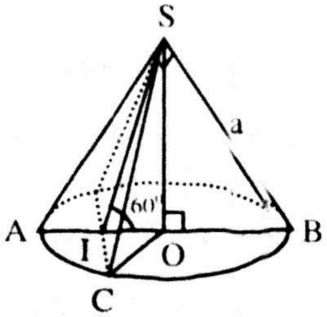
$$OS = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$SI = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$OI = SO.\cot 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad IC = \sqrt{OC^2 - IO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

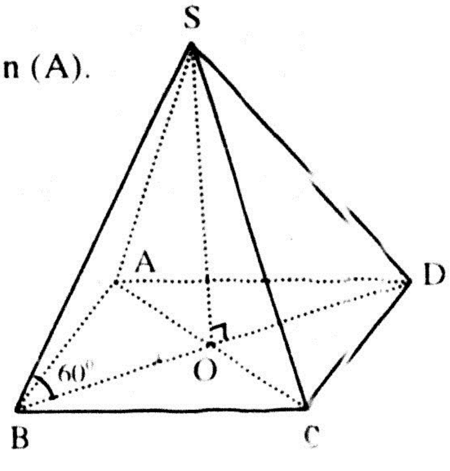
$$S = \frac{1}{2}.SI.2IC = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2$$. Chọn (A).



21. Bán kính đường tròn đáy của hình nón ngoại tiếp hình chóp là:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{BO}{SB}$$



$$\Rightarrow \quad SB = \frac{BO}{\cos 60^0} = 2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \frac{1}{2}2\pi R\,l = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2$

Diện tích hình tròn đáy hình nón là: $S_đ = \pi R^2 = \pi\frac{a^2}{2}$

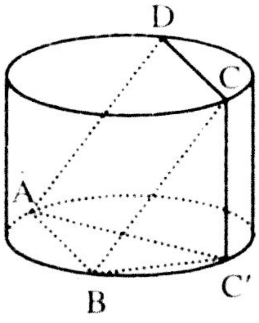
Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi a^2 + \pi\frac{a^2}{2} = 3\pi\frac{a^2}{2}$.

Chọn (A).

22. Thể tích khối cầu bán kính R là $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích khối trụ: $V_t = \pi R^2.2R = 2\pi R^3 \Rightarrow \frac{V_c}{V_t} = \frac{2}{3}$. Chọn (A).

23. Gọi C′ là hình chiếu của C trên đáy hình trụ khi đó AB ⊥ BC′ (vì AB ⊥ BC)



Vậy $AC' = 2R$

Ta có $BC'^2 = 4R^2 - AB^2 = AB^2 - R^2$

$\Rightarrow \quad AB^2 = \frac{5}{2}R^2$. Chọn (A).

24. Nếu khối trụ có bán kính đáy là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ và chiều cao là c thì có thể tích: $V = \frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2).c$. Vai trò của a, b, c như nhau nên chọn (D).

25. Khối nón có bán kính đường tròn đáy $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

và chiều cao $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

nên có thể tích $V = \frac{1}{3}.\pi.\frac{a^2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$. Chọn (B).

26. Chọn (B).

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

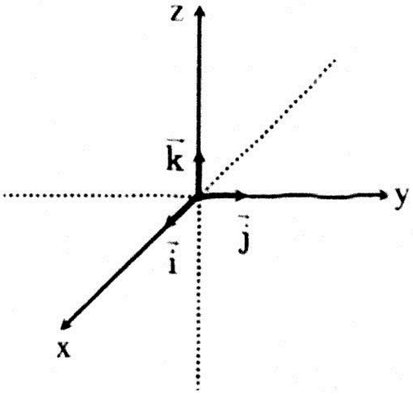
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Định nghĩa: Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz thì: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$



2. Tọa độ của vectơ

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u}\ (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Các tính chất: Cho các vectơ $\vec{u}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ và số k tùy ý, ta có:

1) $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$

2) $\vec{u}_1 \pm \vec{u}_2 = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$

3) $k\,\vec{u}_1 = (kx_1; ky_1; kz_1)$

4) $\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

5) $|\vec{u}_1| = \sqrt{\vec{u}_1^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

6) $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ với $\vec{u}_1 \neq 0$, $\vec{u}_2 \neq 0$

7) $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$

3. Tọa độ của điểm

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

4. Liên hệ giữa tọa độ của vectơ và tọa độ của hai điểm mút

Cho $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

5. Tích có hướng của hai vectơ

a) Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{u'} = (a'; b'; c')$ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{u'}$, kí hiệu là $[\vec{u}, \vec{u'}]$ là vectơ

$$[\vec{u}, \vec{u'}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

b) Tính chất:

a/ Vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, tức là

$[\vec{u}, \vec{v}].\vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}].\vec{v} = 0.$

b/ $\left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}).$

c/ $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

c) Ứng dụng của tích có hướng

i) Diện tích hình bình hành ABCD: $S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$

ii) Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D'

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$$

d) Chú ý: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}.\vec{v}] = \vec{0}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}.\vec{v}].\vec{w} = 0$

6. Phương trình mặt cầu

i) Mặt cầu tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ bán kính R có phương trình:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

ii) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ là phương trình của mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 > d$. Khi đó tâm mặt cầu là điểm $I(-a; -b; -c)$ và bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho các vectơ: $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$; $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k} + 3\vec{j}$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ đó.

b) Tìm côsin của các góc $\left(\vec{v}, \vec{i}\right), \left(\vec{v}, \vec{j}\right)$ *và* $\left(\vec{v}, \vec{k}\right)$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

Giải

a) $\vec{u} = (1; -2; 0)$; $\vec{v} = (3; 5; -5)$; $\vec{w} = (2; 3; -1)$

b) $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \dfrac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}|\,|\vec{i}|} = \dfrac{3}{\sqrt{59}}$

$\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \dfrac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}|\,|\vec{j}|} = \dfrac{5}{\sqrt{59}}$

$\cos(\vec{v}, \vec{k}) = \dfrac{\vec{v}.\vec{k}}{|\vec{v}|\,|\vec{k}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{59}}$

c) $\vec{u}.\vec{v} = 1.3 - 2.5 + 0.(-5) = -7$

$\vec{u}.\vec{w} = 1.2 - 2.3 + 0.(-1) = -4$

$\vec{v}.\vec{w} = 3.2 + 5.3 + 5.1 = 26$

2. *Cho vectơ* $\vec{u}$ *tuỳ ý khác* $\vec{0}$. *Chứng minh rằng :*

$$\cos^2\left(\vec{u}, \vec{i}\right) + \cos^2\left(\vec{u}, \vec{j}\right) + \cos^2\left(\vec{u}, \vec{k}\right) = 1.$$

Giải

Giả sử $\vec{u} = (x; y; z)$ ta có:

$$\cos(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}|\,|\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \cos^2(\vec{u}; \vec{i}) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tương tự: $\cos^2(\vec{u}; \vec{j}) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ và $\cos^2(\vec{u}, \vec{k}) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Vậy $\cos^2(\vec{u}, \vec{i}) + \cos^2(\vec{u}, \vec{j}) + \cos^2(\vec{u}, \vec{k}) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$

3. *Tìm góc giữa hai vectơ* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *trong mỗi trường hợp sau :*

a) $\vec{u} = (1; 1; 1)$; $\vec{v} = (2; 1; -1)$.

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Giải

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{3}.\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có: $\vec{u} = (3; 4; 0)$; $\vec{v} = (0; -2; 3) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-8\sqrt{13}}{65}$

4. *Biết* $\left|\vec{u}\right| = 2$, $\left|\vec{v}\right| = 5$, *góc giữa vectơ* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *bằng* $\dfrac{2\pi}{3}$. *Tìm k để vectơ* $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v}$ *vuông góc với vectơ* $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

Giải

Ta có: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\vec{p} \perp \vec{q}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{p}.\vec{q} = 0 \Leftrightarrow (k\vec{u} + 17\vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3k|\vec{u}|^2 - 17|\vec{v}|^2 + (51 - k)\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3k.4 - 17.25 + (51 - k).2.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 17k - 680 = 0 \Leftrightarrow k = 40$

Vậy với k = 40 thì $\vec{p} \perp \vec{q}$.

5. *Cho điểm M = (a ; b ; c).*

a) Tìm toạ độ hình chiếu (vuông góc) của M trên các mặt phẳng toạ độ và các trục toạ độ.

b) Tìm khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng toạ độ, đến các trục toạ độ.

c) Tìm toạ độ của các điểm đối xứng với M qua các mặt phẳng toạ độ.

Giải

a) Gọi $M_1(x; y; 0)$ là hình chiếu của điểm M(a; b; c) trên mp(Oxy) thì $\overrightarrow{MM_1} = (x - a; y - b; -c)$ và $\overrightarrow{MM_1}.\vec{i} = \overrightarrow{MM_1}.\vec{j} = 0$ nên:

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ y - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}. \text{ Vậy } M_1(a; b; 0).$$

Tương tự $M_2(0; b; c)$ là hình chiếu của M(a; b; c) trên mp(Oyz) và $M_3(a; 0; c)$ là hình chiếu của M(a; b; c) trên mp(Oxz).

Giả sử $M_4(x; 0; 0)$ là hình chiếu của M(a; b; c) trên trục Ox thì $\overrightarrow{MM_4} = (x - a; -b; -c)$ và $\overrightarrow{MM_4}.\vec{i} = 0$ nên x = a. Vậy $M_4(a; 0; 0)$.

Tương tự $M_5(0; b; 0)$ và $M_6(0; 0; c)$ lần lượt là hình chiếu của M(a; b; c) trên trục Oy và Oz.

b) Khoảng cách từ M đến mp(Oxy) là:

$d(M, (Oxy)) = MM_1 = \sqrt{(a - a)^2 + (b - b)^2 + (c - 0)^2} = |c|$

$d(M, (Oyz)) = |a|$; $d(M, (Oxz)) = |b|$

$d(M, (Ox)) = MM_4 = \sqrt{(a - a)^2 + (b - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

$d(M, Oy) = \sqrt{a^2 + c^2}$; $d(M, Oz) = \sqrt{a^2 + b^2}$

c) Gọi $M_1'(x; y; z)$ là điểm đối xứng của M qua mp(Oxy) thì M_1 là trung điểm của MM_1' nên

$$\begin{cases} x_{M_1} = \dfrac{x_M + x_{M'_1}}{2} \\ y_{M_1} = \dfrac{y_M + y_{M'_1}}{2} \\ z_{M_1} = \dfrac{z_M + z_{M'_1}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'_1} = 2x_{M_1} - x_M = 2a - a = a \\ y_{M'_1} = 2y_{M_1} - y_M = 2b - b = b \\ z_{M'_1} = 2z_{M_1} - z_M = 0 - c = -c \end{cases}$$

Vậy $M'_1(a; b; -c)$.

Tương tự $M'_2(-a; b; c)$ là điểm đối xứng của M qua mp(Oyz)

và $M'_3(a; -b; c)$ là điểm đối xứng của M qua mp(Oxz).

6. *Cho hai điểm $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Tìm toạ độ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$), trong đó $k \neq 1$.*

Giải

Giả sử M(x; y; z) thỏa $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ với $k \neq 1$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (x_1 - x; y_1 - y; z_1 - z)$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x = k(x_2 - x) \\ y_1 - y = k(y_2 - y) \\ z_1 - z = k(z_2 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1 - k} \end{cases}$$

7. *Cho hình bình hành ABCD với A(–3 ; –2 ; 0), B(3 ; –3 ; 1), C(5 ; 0; 2). Tìm toạ độ đỉnh D và góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.*

Giải

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-6; 1; -1)$; $\overrightarrow{BC} = (2; 3; 1)$ vì $\dfrac{-6}{2} \neq \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-1}{1}$ nên $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng

Giả sử D(x; y; z) thì $\overrightarrow{BD} = (x - 3; y + 3; z - 1)$

ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -6 + 2 \\ y + 3 = 1 + 3 \\ z - 1 = -1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy D(–1; 1; 1). Ta có $\overrightarrow{AC} = (8; 2; 2)$; $\overrightarrow{BD} = (-4; 4; 0)$ do đó:

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{AC.BD} = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72}.\sqrt{32}} = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{2\pi}{3}$$

8. *a) Tìm toạ độ điểm M thuộc Ox sao cho M cách đều hai điểm A(1 ; 2 ; 3) và B(−3 ; −3 ; 2).*

b) Cho ba điểm A(2 ; 0 ; 4), B(4 ; $\sqrt{3}$; 5) và C(sin5t ; cos3t ; sin3t). Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc toạ độ).

Giải

a) Giả sử M(x; 0; 0) thuộc trục Ox và MA = MB

Ta có $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + 2^2 + 3^2 = (-3-x)^2 + (-3)^2 + 2^2$

$\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 + 13 = 9 + 6x + x^2 + 13 \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy M(−1; 0; 0)

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; \sqrt{3}; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (\sin 5t, \cos 3t; \sin 3t)$

$AB \perp OC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 5t + \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 5t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t = 0 \Leftrightarrow \sin 5t = -\sin(3t + \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \sin 5t = \sin\left(-3t - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t = -3t - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5t = \pi + 3t + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{4} \\ t = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

9. *Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau :*

a) $\vec{u}$ *(4 ; 3 ; 4),* $\vec{v}$ *(2 ; −1 ; 2),* $\vec{w}$ *(1 ; 2 ; 1).*

b) $\vec{u}$ *(1 ; −1 ; 1),* $\vec{v}$ *(0 ; 1 ; 2),* $\vec{w}$ *(4 ; 2 ; 3).*

c) $\vec{u}$ *(4 ; 2 ; 5),* $\vec{v}$ *(3 ; 1 ; 3),* $\vec{w}$ *(2 ; 0 ; 1).*

Giải

a) Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (10; 0; -10)$

Suy ra: $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 10.1 + 0.2 - 10.1 = 0$ do đó $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng

b) $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} \neq 0$ suy ra $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ không đồng phẳng

c) $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0$ suy ra $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

10. *Cho ba điểm A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 0 ; 1), C(2 ; 1 ; 1).*

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A.

d) Tính các góc của tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 1; 0)$ vì $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$ nên $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương do đó A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên ΔABC vuông tại A nên có diện tích

$$S = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

c) Gọi h_a là độ dài đường cao kẻ từ A ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.BC.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

d) Vì tam giác ABC vuông tại A nên

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} ; \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

11. *Cho bốn điểm A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 1) và D(–2 ; 1 ; –2).*

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Tính góc giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện đó.

c) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1; 1; 1)$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = -3.1 + 1.1 - 2.1 = -4 \neq 0$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng do đó A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Ta có $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -3)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$

Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các cặp đường thẳng AB và CD, AC và BD, AD và BC thì

$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})| = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$\cos\beta = |\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})| = \frac{|2 + 0 - 2|}{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = 0 \Rightarrow AC \perp BD$$

$$\cos\gamma = |\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})| = \frac{|0 - 1 - 2|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

c) Thể tích tứ diện ABCD là: $V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|-4| = \frac{2}{3}$

Gọi h_A là đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A

Ta có : $V = \frac{1}{3}h_A.S_{BCD} \Rightarrow h_A = \frac{3V}{S_{BCD}}$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]\right| = \sqrt{3}$$

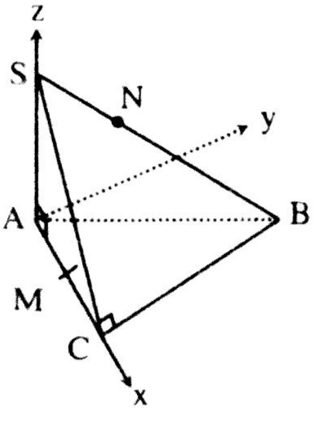
Vậy $h_A = \frac{3.\frac{2}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

12. *Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = h, đáy là tam giác ABC vuông tại C, AC = b, BC = a. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho* $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

Giải



Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ, B nằm trong góc xOy.

Ta có A(0; 0; 0), C(b; 0; 0), B(b; a; 0), S(0; 0; h).

$$M\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right)$$

$$\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$$

Gọi N(x; y; z) thì $\overrightarrow{SN} = (x; y; z - h)$

$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{3} \\ y = \frac{a}{3} \\ z - h = \frac{-h}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{3} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{2h}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } N\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$$

a) $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right) = \left(-\frac{b}{6}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$$

b) $MN \perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$

13. *Tìm toạ độ tâm và bán kính mỗi mặt cầu sau đây :*

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0.$

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0.$

c) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0.$

Giải

a) Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 = 16$

$\Leftrightarrow \quad (x - 4)^2 + (y + 1) + z^2 = 16$

Mặt cầu có tâm $I(4; -1; 0)$ và bán kính $R = 4$

b) Ta có $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{6}$$

Mặt cầu có tâm $I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và có bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$

c) $\qquad 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x + 2y + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$$

Mặt cầu có tâm $I\left(\frac{1}{3}; -1; 0\right)$ bán kính $R = 1$.

14. *Trong mỗi trường hợp sau, hãy viết phương trình mặt cầu :*

a) Đi qua ba điểm A(0 ; 8 ; 0), B(4 ; 6 ; 2), C(0 ; 12 ; 4) và có tâm nằm trên mp(Oyz).

b) Có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox.

c) Có tâm I(1 ; 2 ; 3) và tiếp xúc với mp(Oyz).

Giải

a) Tâm I của mặt cầu nằm trên mp(Oyz) nên I (0; b; c). Ta tìm b và c để IA = IB = IC. Ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8 - b)^2 + c^2 = 4^2 + (6 - b)^2 + (2 - c)^2 \\ (8 - b)^2 + c^2 = (12 - b)^2 + (4 - c)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy tâm $I(0; 7; 5)$ bán kính $R = IA = \sqrt{0 + 1 + 25} = \sqrt{26}$. Mặt cầu có phương trình: $x^2 + (y - 7)^2 + (z - 5)^2 = 26$.

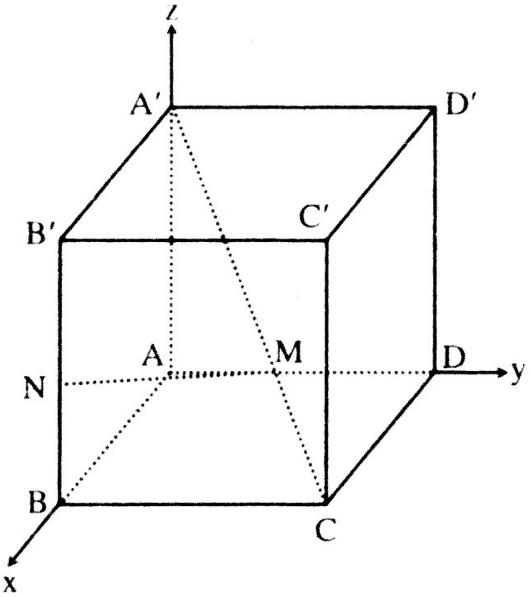
b) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên tia Ox và mặt cầu tiếp xúc với mp(Oyz) nên điểm tiếp xúc phải là O, do đó bán kính mặt cầu là R = IO = 2 và I(2; 0; 0). Mặt cầu có phương trình: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Vì mặt cầu có tâm I(1; 2; 3) và tiếp xúc với mp(Oyz) nên bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ I tới mp(Oyz), vậy R = 1. Mặt cầu có phương trình: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BB'. Chứng minh rằng* $\overrightarrow{MN}$ *vuông góc với* $\overrightarrow{A'C}$.

Hướng dẫn: Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ các vectơ đơn vị: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$.



Khi đó: $M\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$; $N\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$;

$C(1; 1; 0)$; $A'(0; 0; 1)$

$\overrightarrow{MN} = \left(1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{A'C}$

2. *Cho hình lập phương ABCD.A'C'C'D' cạnh a. Gọi P, Q là các điểm xác định bởi:* $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D}$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trung điểm M của cạnh BB'.

b) Tính độ dài đoạn PQ.

Hướng dẫn:

a) Chọn hệ trục tương tự như bài 1.

$D'(0; 1; 1) \Rightarrow P(0; -1; -1)$, $C'(1; 1; 1)$, $D(0; 1; 0)$

$Q(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{C'Q} = (x-1; y-1; z-1)$. $\overrightarrow{DC'} = (1; 0; 1)$

$\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'} \Rightarrow x = 2, y = 1, z = 2$.

Vậy $Q(2; 1; 2)$, $M\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{PQ}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{PM}$.

b) $PQ = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17}$; *Vậy* $PQ = \sqrt{17}a$.

3. *Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD khi biết tọa độ các đỉnh A, B, C, D.*

4. *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết tọa độ các đỉnh A, B', C, D'. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.*

Hướng dẫn: Tìm tọa độ tâm các hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

5. *Tìm trên Oy điểm M cách đều hai điểm $A(3; 1; 0)$ và $B(-2; 4; 1)$.*

Hướng dẫn: $M(0; y; 0) \in Oy$: $MA = MB \Leftrightarrow y = \dfrac{11}{6}$.

6. *Tìm trên mặt phẳng Oxz điểm M cách đều 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; 1; -1)$.*

Hướng dẫn: $M(x; 0; z)$. *Giải hệ:* $\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$ *ta được* $x = \dfrac{5}{8}$, $y = \dfrac{-7}{6}$.

7. *Viết phương trình mặt cầu:*

   a) Có tâm $I(-3; 2; 0)$, đường kính bằng 6.

   b) Có đường kính AB với $A(3; -1; 0)$, $B(1; 3; -2)$.

   c) Có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua $A(2; 0; -3)$.

   d) Có tâm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxy).

8. *Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$ và có tâm thuộc mp(Oxy).*

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình mặt phẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của mp(α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mp(α).

Định lí: Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ đều là phương trình của một mặt phẳng xác định có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$.

- Nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ thì phương trình của nó là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Nếu ($\alpha$) là mặt phẳng có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $(A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của nó.
- Mặt phẳng qua 3 điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

2. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình:

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

a) Hai mặt phẳng đó cắt nhau khi và chỉ khi $A : B : C \neq A' : B' : C'$.

b) Hai mặt phẳng đó song song khi và chỉ khi $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.

c) Hai mặt phẳng đó trùng nhau khi và chỉ khi $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.

3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và mp(α) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$

Khoảng cách từ M_0 đến mp(α) là: $d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

15. *Trong mỗi trường hợp sau, viết phương trình mặt phẳng:*

a) Đi qua ba điểm $M(2 ; 0 ; -1)$, $N(1 ; -2 ; 3)$, $P(0 ; 1 ; 2)$.

b) Đi qua hai điểm $A(1 ; 1 ; -1)$, $B(5 ; 2 ; 1)$ và song song với trục Oz.

c) Đi qua điểm $(3 ; 2 ; -1)$ và song song với mặt phẳng có phương trình $x - 5y + z = 0$.

d) Đi qua hai điểm $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng: $x - y + z + 1 = 0$.

e) Đi qua điểm $M(a ; b ; c)$ $(abc \neq 0)$ và song song với một mặt phẳng toạ độ.

g) Đi qua điểm $G(1 ; 2 ; 3)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC.

h) Đi qua điểm $H(2 ; 1 ; 1)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; -2; 4)$, $\overrightarrow{MP} = (-2; 1; 3)$

Suy ra $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (-10; -5; -5) = -5.(2; 1; 1)$.

Chọn vectơ pháp tuyến của mp(MNP) là $\vec{n} = (2; 1; 1)$. Mp(MNP) đi qua $M(2; 0; -1)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$ nên có phương trình là:

$$2(x - 2) + 1.(y - 0) + 1.(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 3 = 0$$

b) Mp(P) đi qua A, B và song song với Oz có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB} = (4; 1; 2)$ và vuông góc với $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{k}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1; -4; 0)$$

(P) qua $A(1; 1; -1)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -4; 0)$ nên (P):

$$1.(x - 1) - 4(y - 1) + 0.(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0$$

c) Mặt phẳng (α): $x - 5y + z = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -5, 1)$.

Mp(β) qua $A(3; 2; -1)$ song song với mp(α) nên (β) cùng có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -5; 1)$

Do đó (β): $(x - 3) - 5(y - 2) + (z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + z + 8 = 0$

d) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$

Mp(α): $x - y + z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (1; -1; 1)$.

Mp(β) đi qua A, B và vuông góc với mp(α) nên vectơ pháp tuyến của $(\beta$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}$ và vuông góc với $\vec{m}$ nên ta có thể chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{m}] = (0; 2; 2)$.

Vậy (P): $2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow y + z - 2 = 0$

e) Mặt phẳng đi qua $M(a; b; c)$ song song với mp(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên có phương trình $1.(z - c) = 0$ hay $z - c = 0$.

Tương tự mặt phẳng đi qua $M(a; b; c)$ song song với mp(Oyz) có phương trình $x - a = 0$; mặt phẳng đi qua $M(a; b; c)$ song song với mp(Oxz) có phương trình $y - b = 0$.

g) Giả sử $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.

Vì $G(1; 2; 3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\frac{a + 0 + 0}{3} = 1; \quad \frac{0 + b + 0}{3} = 2; \quad \frac{0 + 0 + c}{3} = 3.$$

Suy ra $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$. Vậy mp(ABC): $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1$

h) Tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên H là trực tâm ΔABC khi và chỉ khi $OH \perp$ mp(ABC).

Vậy mp(ABC) đi qua H và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ nên có phương trình: $2(x - 2) + (y - 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 6 = 0$.

16. *Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau:*

a) $x + 2y - z + 5 = 0$ *và* $2x + 3y - 7z - 4 = 0$.

b) $x - 2y + z - 3 = 0$ *và* $2x - y + 4z - 2 = 0$.

c) $x + y + z - 1 = 0$ *và* $2x + 2y + 2z + 3 = 0$.

d) $3x - 2y + 3z + 5 = 0$ *và* $9x - 6y - 9z - 5 = 0$.

e) $x - y + 2z - 4 = 0$ *và* $10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

Giải

a) Ta có $1 : 2 : (-1) \neq 2 : 3 : (-7)$ nên hai mặt phẳng đã cho cắt nhau.

b) $1 : (-2) : 1 \neq 2 : (-1) : 4$ nên hai mặt phẳng cắt nhau.

c) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$ nên hai mặt phẳng song song.

d) $3 : (-2) : 3 \neq 9 : (-6) : (-9)$ nên hai mặt phẳng cắt nhau.

e) $\frac{1}{10} = \frac{-1}{-10} = \frac{2}{20} = \frac{-4}{-40}$ nên hai mặt phẳng trùng nhau.

17. *Xác định giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây song song :*

a) $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$.

b) $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$.

Giải

a) Hai mặt phẳng đã cho song song nhau khi và chỉ khi

$$\frac{2}{m} = \frac{n}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -1 \end{cases}$$

b) Hai mặt phẳng đã cho song song nhau khi và chỉ khi

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{n} = \frac{m}{2} \neq \frac{-2}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

18. *Cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là :*

$$2x - my + 3z - 6 + m = 0 \text{ và } (m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì :

a) Hai mặt phẳng đó song song ;

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau ;

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau ;

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc ?

Giải

Mặt phẳng $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; -m; 3)$.

Mặt phẳng $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (m + 3; -2; 5m + 1)$.

Ta có $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-5m^2 - m + 6; -7m + 7; m^2 + 3m - 4)$

$$\vec{n}_1 \text{ và } \vec{n}_2 \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m^2 - m + 6 = 0 \\ -7m + 7 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Với $m = 1$ thì hai mặt phẳng có phương trình là $2x - y + 3z - 5 = 0$ và $4x - 2y + 6z - 10 = 0$ nên chúng trùng nhau. Vậy:

a) Không tồn tại m để hai mặt phẳng đó song song.

b) Với m = 1 thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

c) Với m ≠ 1 thì hai mặt phẳng đó cắt nhau.

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc nhau khi và chỉ khi $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(m+3) + 2m + 3(5m+1) = 0 \Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{19}$$

19. *Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng (α) và (α') trong mỗi trường hợp sau :*

a) $(\alpha): 2x - y + 4z + 5 = 0,\ (\alpha'): 3x + 5y - z - 1 = 0.$

b) $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0,\ (\alpha'): 6x - 3y + 2z - 2 = 0.$

c) $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0,\ (\alpha'): x + 2y + z + 5 = 0.$

Giải

a) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi:

$$\frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9+25+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}|2x - y + 4z + 5| = \sqrt{3}|3x + 5y - z - 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}(3x + 5y - z - 1)$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng:

$$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} + 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} + \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0$$

$$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} - 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} - \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0$$

b) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi

$$\frac{|2x + y - 2z - 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|6x - 3y + 2z - 2|}{\sqrt{36+9+4}}$$

$$\left[\begin{array}{l} 7(2x + y - 2z - 1) = 3(6x - 3y + 2z - 2) \\ 7(2x + y - 2z - 1) = -3(6x - 3y + 2z - 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x + 16y - 20z - 1 = 0 \\ 32x - 2y - 8z - 13 = 0 \end{array}\right.$$

Tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng có phương trình:

$$-4x + 16y - 20z - 1 = 0;\ 32x - 2y - 8z - 13 = 0$$

c) Điểm M(x; y; z) cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi

$$\frac{|x + 2y + z - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|x + 2y + z + 5|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = x + 2y + z + 5 \\ x + 2y + z - 1 = -x - 2y - z - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 4 = 0$$

Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng có phương trình: $x + 2y + z + 2 = 0$.

20. *Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ và } Ax + By + Cz + D' = 0 \text{ với } D \neq D'.$$

Giải

Hai mặt phẳng đã cho song song nhau.

Lấy $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ta có $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng thứ hai, ta có: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

21. *Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau :*

a) M cách đều điểm $A(2 ; 3 ; 4)$ và mặt phẳng $2x + 3y + z - 17 = 0$.

b) M cách đều hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$.

Giải

a) Giả sử $M(0; 0; c)$ thuộc trục Oz.

Ta có $MA = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4 - c)^2}$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng đã cho là $d = \dfrac{|c - 17|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}}$

$$MA = d \Leftrightarrow \sqrt{13 + (4 - c)^2} = \frac{|c - 17|}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow 13 + (4 - c)^2 = \frac{(c - 17)^2}{14}$$

$\Leftrightarrow c = 3$. Vậy $M(0; 0; 3)$

b) $M(0; 0; c)$ cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi

$$\frac{|-c + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|c + 5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow c = -2. \text{ Vậy } M(0; 0; -2).$$

22. *Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC, OCA là các tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Bằng phương pháp tọa độ hãy chứng minh :*

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Giải

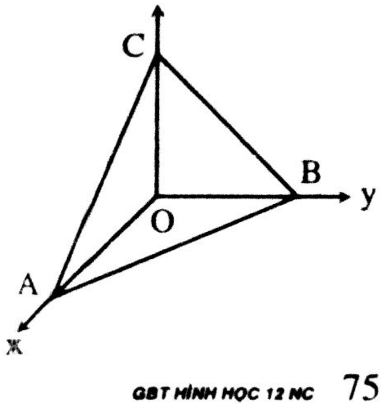
a) Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Ta có $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ $C(0; 0; c)$

với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$

nên $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = a^2 > 0 \Rightarrow \cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} > 0$



$\Rightarrow$ A là góc nhọn.

Tương tự các góc B, C của tam giác ABC cũng nhọn.

b) Mp(ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ nên có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$$

Mp(OBC) ≡ Mp(Oyz) có vectơ pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Gọi α là góc giữa mp(ABC) và mp(OBC) thì:

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|}\right)^2 = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Tương tự $\cos^2\beta = \dfrac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ và $\cos^2\gamma = \dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

23. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.*

Giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x - 1) + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$

- Mặt cầu có tâm I(1; 2; 3) bán kính R = 4.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đã cho nên có phương trình

$4x + 3y - 12z + D = 0$ với $D \neq 1$.

Mp(P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi khoảng cách d thì I đến mp(P) bằng R, tức là:

$$d = \frac{|4 + 6 - 36 + D|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|-26 + D|}{13} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -26 + D = 52 \\ -26 + D = -52 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 78 \\ D = -26 \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu là:

$4x + 3y - 12z + 78 = 0$; $4x + 3y - 12z - 26 = 0$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua 2 điểm A(2; –1; 4), B(3; 2; –1) và vuông góc với mặt phẳng $x + y + 2z - 3 = 0$.

Hướng dẫn: (α) đi qua A(2; –1; 4) nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -5)$ *và* $\vec{n} = (1; 1; 2)$ *làm* cặp vectơ chỉ phương. (α): $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua $M(3; -1; -5)$ đồng thời vuông góc với mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và mặt phẳng: $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Hướng dẫn: (α) qua $M(3; -1; -5)$ nhận $\vec{n} = (3; -2; 2)$; $\vec{m} = (5; -4; 3)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có pháp vectơ $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

(α): $2x + y - 2z - 15 = 0$.

3. Cho hình lập phương ABCD A′B′C′D′ biết $A'(0; 0; 0)$, $B'(a; 0; 0)$, $D'(0; a; 0)$, $A(0; 0; a)$ trong đó $a > 0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và B′C′. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng AN và BD′.

Hướng dẫn: Vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{AN} = \left(a; \frac{a}{2}; -a\right) = \frac{a}{2}(2; 1; -2);\ \overrightarrow{BD'} = (-a; a; -a) = -a(1; -1; 1)$$

Pháp vectơ là $\vec{n} = (-1; -4; -3)$, (α) $x + 4y + 3z - \dfrac{7a}{2} = 0$

4. Cho hai mặt phẳng: (α_1) $3x - 5y + mz - 3 = 0$; (α_2) $x + 3y + 2z + 5 = 0$

a) Biện luận sự tương quan của hai mặt phẳng

b) Xác định m để $(\alpha_1) \perp (\alpha_2)$

Đáp số: $m = 6$

5. Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ vuông góc với mặt phẳng: $5x - 2y + 5z - 10 = 0$, và hợp với mặt phẳng $x - 4y - 8z + 12 = 0$ một góc 45^0.

Đáp số: (α_1): $x + 20y + 7z = 0$, (α_2): $x - z = 0$

6. Hãy chứng minh rằng các mặt phẳng α, β, γ, δ sau đây là các mặt phẳng chứa bốn mặt của một hình hộp chữ nhật.

α: $7x + 4y - 4z + 30 = 0$

β: $36x - 51y + 12z + 17 = 0$

γ: $7x + 4y - 4z - 6 = 0$

δ: $12x - 17y + 4z - 3 = 0$

Hướng dẫn: Chứng minh $\alpha // \gamma$, $\beta // \delta$, $\alpha \perp \beta$.

7. Cho $A(2; 1; 0)$, $B(-1; 2; 3)$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) trung trực của AB.

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua A và song song với (α).

c) Viết phương trình mặt phẳng (γ) qua A vuông góc với (α) và vuông góc với mặt phẳng (xOy).

Đáp số: a) α: $6x - 2y - 6z + 9 = 0$

b) β: $6x - 2y - 6z - 10 = 0$

c) γ: $x + 3y - 5 = 0$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

– Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$ là $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

– Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1a_2a_3 \neq 0$ là:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng d qua M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d′ đi qua M'_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.

Ta có: d và d′ trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u}'$ và $[\overrightarrow{M_0M'_0}]$ đôi một cùng phương

$$\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] = [\vec{u}, \overrightarrow{M_0M'_0}] = \vec{0}$$

$$d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ và } \vec{u}' \text{ cùng phương} \\ \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{M_0M'_0}] \neq \vec{0}. \end{cases}$$

$$\text{d và d' cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ và } \vec{u}' \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}, \vec{u}' \text{ và } \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \end{cases}$$

d và d′ chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u}'$ và $\overrightarrow{M_0M'_0}$ không đồng phẳng.

$$\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0.$$

3. Khoảng cách

– Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là: $h = \dfrac{\left|[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}$.

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 với d_1 đi qua điểm M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$; d_2 đi qua điểm M_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$ là $h = \dfrac{\left|[\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]\right|}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

24. *Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây :*

a) Các trục toạ độ Ox, Oy và Oz.

b) Các đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ (với $x_0.y_0.z_0 \neq 0$) và song song với mỗi trục toạ độ.

c) Đường thẳng đi qua M(2 ; 0 ; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1 ; 3 ; 5)$.

d) Đường thẳng đi qua N(–2 ; 1 ; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0 ; 0 ; -3)$.

e) Đường thẳng đi qua N(3 ; 2 ; 1) và vuông góc với mặt phẳng

$$2x - 5y + 4 = 0.$$

g) Đường thẳng đi qua hai điểm P(2 ; 3 ; –1) và Q(1 ; 2 ; 4).

Giải

a) Trục Ox đi qua O(0; 0; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Tương tự, trục Oy có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

Trục Oz có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Các phương trình đó không có phương trình chính tắc.

b) Đường thẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ song song với trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

Tương tự đường thẳng đi qua M_0 song song với Oy có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 \end{cases}$

Đường thẳng đi qua M_0 song song với Oz có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t \end{cases}$$

Các đường thẳng trên không có phương trình chính tắc.

c) Đường thẳng đi qua M(2; 0; –1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 3; 5)$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ và phương trình chính tắc: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}$

d) Đường thẳng đi qua N(–2; 1; 2) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; 0; -3)$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

e) Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - 5y + 4 = 0$ nên $\vec{u} = (2; -5; 0)$.

Vậy đường thẳng có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

g) Đường thẳng đi qua P(2; 3; –1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1; -1; 5)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ và phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{5}$$

25. *Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây :*

a) Đường thẳng đi qua điểm (4 ; 3 ; 1) và song song với đường thẳng có phương trình : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

b) Đường thẳng đi qua điểm (–2 ; 3 ; 1) và song song với đường thẳng có phương trình : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{3}$.

Giải

a) Đường thẳng đã cho có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -3; 2)$. Đường thẳng cần tìm đi qua A(4; 3; 1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -3; 2)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$

b) Đường thẳng đã cho có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 3)$.

Đường thẳng cần tìm có các phương trình:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3} \text{ và } \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

26. *Viết phương trình hình chiếu vuông góc với đường thẳng*

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1} \text{ trên mỗi mặt phẳng toạ độ.}$$

Giải

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Mỗi điểm $M(x; y; z) \in d$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x; y; 0) \in d'$, d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy). Vậy d' có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$

Tương tự phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

27. *Cho đường thẳng* $d: \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ *và mặt phẳng* $(P): x + y + z - 7 = 0$.

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d, và một điểm nằm trên d.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

Giải

a) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 4; 2)$. Cho $t = 0$ ta có một điểm $M_0(0; 8; 3)$ nằm trên d.

b) Vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P) thì vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha$ của (α) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{n}_P$ nên ta lấy $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}, \vec{n}_P] = (2; 1; -3)$. Mp$(\alpha)$ đi qua $M_0(0; 8; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -3)$ nên có phương trình là:

$$2(x - 0) + 1.(y - 8) - 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z + 1 = 0$$

c) Vì d không vuông góc với (P) nên hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d', d' là giao tuyến của (α) và (P): $\begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Cho $z = 0$ ta có $x = -8$; $y = 15$, d' qua A (−8; 15; 0)

d' có vectơ chỉ phương $\vec{a} = [\vec{n}_P, \vec{n}] = (-4; +5; -1)$

d' có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -8 - 4t \\ y = 15 + 5t \\ z = -t \end{cases}$

28. *Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng d và d' cho bởi phương trình :*

a) d : $\dfrac{x-1}{2} = y - 7 = \dfrac{z-3}{4}$ *; d' :* $\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

b) d : $\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

d' là giao tuyến của hai mặt phẳng : (α) : $x + y - z = 0$, *(α') :* $2x - y + 2z = 0$.

Giải

Đường thẳng d đi qua M(1; 7; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 4)$. Đường thẳng d' đi qua M'(3; −1; −2) có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (6; -2; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2; -8; -5)$ và $[\vec{u}, \vec{u}'] = (9; 22; -10) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} = -108 \neq 0$.

Vậy d và d' chéo nhau.

b) Đường thẳng d đi qua M(0; −3; −3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -4; -3)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương

$$\vec{u}' = [\vec{n}, \vec{n}'] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1; -4; -3$$

d, d' có cùng vectơ chỉ phương và vì M(0; −3; −3) không nằm trên d' nên d // d'.

29. *Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1 ; −1 ; 1) và cắt cả hai đường thẳng sau :* *d :* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ *; d' :* $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

Giải

Lấy điểm M(1 + 2t, t, 3 − t) nằm trên d và điểm M'(t', −1 − 2t'; 2 + t') nằm trên d'.

Rõ ràng A ∉ d và A ∉ d'. Ta tìm t và t' sao cho A, M, M' thẳng hàng, tức $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2t; 1 + t; 2 - t)$, $\overrightarrow{AM} = (-1 + t'; -2t'; 1 + t')$. Do đó:

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}] = \left(\begin{vmatrix} 1 + t & 2 - t \\ -2t' & 1 + t' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 - t & 2t \\ 1 + t' & -1 + t' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2t & 1 + t \\ -1 + t' & -2t' \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1 + t + 5t' - tt'; -2 - t + 2t' - 3tt'; 1 + t - t' - 5tt').$$

Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương khi và chỉ khi $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}] = \vec{0}$ hay:

$$\begin{cases} 1 + t + 5t' - tt' = 0 \\ -2 - t + 2t' - 3tt' = 0 \\ 1 + t - t' - 5tt' = 0 \end{cases}$$

Khử số hạng tt' từ các phương trình trên, ta được hệ: $\begin{cases} 5 + 4t + 13t' = 0 \\ 4 + 4t + 26t' = 0 \end{cases}$

Suy ra $t = -\dfrac{3}{2}$, $t' = \dfrac{1}{13}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(-3; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và M, Δ có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AM} = (-6; -1; 7)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 7t \end{cases}$

30. *Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1, và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình của d_1, d_2 và d_3 là :*

$$d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}; \quad d_2: \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 2}{3}; \quad d_3: \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t'. \end{cases}$$

Giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0; 4; -1)$, d_2 có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

Lấy $M_2(1 + t; -2 + 4t; 2 + 3t)$ trên d_2 và $M_3(-4 + 5t'; -7 + 9t'; t')$ trên d_3. Ta tìm t và t' để $\overrightarrow{M_2M_3}$ cùng phương với $\vec{u}_1$.

Ta có $\overrightarrow{M_2M_3} = (-5 + 5t' - t; -5 + 9t' - 4t; -2 + t' - 3t)$ $\overrightarrow{M_2M_3}$ cùng phương với $\vec{u}_1$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} -5 + 5t' - t = 0 \\ \dfrac{-5 + 9t' - 4t}{4} = \dfrac{-2 + t' - 3t}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$

Khi đó $M_2(1; -2; 2)$ và $\overrightarrow{M_2M_3} = (0; 4; -1)$.

Vậy Δ qua M_2, M_3 có phương trình: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Rõ ràng $M_2 \notin d_1$. Vậy Δ chính là đường thẳng cần tìm.

31. *Cho hai đường thẳng :* $d_1 : \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$ *và* $d_2 : \dfrac{3 - x}{7} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{3}$.

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc toạ độ O và song song với d_1 và d_2.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Giải

a) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(8; 5; 8)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(3; 1; 1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-7; 2; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{M_2M_1} = (5; 4; 7)$, $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (8; 4; 16)$

do đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0$

Vậy hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua O song song với cả d_1 và d_2. Mp(α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \dfrac{1}{4}[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 1; 4)$.

Vậy (α): $2(x - 0) + 1(y - 0) + 4(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 4z = 0$

Rõ ràng $M_1, M_2 \notin (\alpha)$. Vậy (α) chính là mặt phẳng cần tìm.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 là:

$$d = \frac{\left|[\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]\right|} = \frac{168}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 16^2}} = 2\sqrt{21}$$

d) Giả sử PQ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 với $P \in d_1$; $Q \in d_2$. Khi đó ta có các giá trị t và t′ sao cho:

$$P = (8 + t; 5 + 2t; 8 - t),\ Q = (3 - 7t'; 1 + 2t'; 1 + 3t')$$

Ta có: $\overrightarrow{PQ} = (-5 - 7t' - t; -4 + 2t' - 2t; -7 + 3t' + t)$.

Vectơ $\overrightarrow{PQ}$ đồng thời vuông góc với hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 7t' - t + 2(-4 + 2t' - 2t) - (-7 + 3t' + t) = 0 \\ -7(-5 - 7t' - t) + 2(-4 + 2t' - 2t) + 3(-7 + 3t' + t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6t' - 6t = 6 \\ 62t' + 6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Vậy P = (7; 3; 9), Q = (3; 1; 1) và do đó đường vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình: $\frac{x-3}{7-3} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{9-1}$ hay $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$.

32. *Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) có phương trình :*

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5} ; (\alpha) : 2x + y + z - 8 = 0.$$

a) Tìm góc giữa d và (α).

b) Tìm toạ độ giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α).

Giải

ı) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 5)$, mp(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 1)$. Gọi φ là góc giữa d và (α) thì $0 \le \varphi \le 90^0$ và

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{|2.2 + 3.1 + 5.1|}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{57}}$$

) d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$

Thay x, y, z vào phương trình (α) ta có:

$$2(2 + 2t) + (-1 + 3t) + (1 + 5t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

Ta được giao điểm $I\left(\frac{8}{3}; 0; \frac{8}{3}\right)$.

:) Gọi (β) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (α) thì hình chiếu d′ của d trên (α) là giao tuyến của (β) và (α). Bởi vậy, ta cần tìm phương trình của (β). Vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta$ của (β) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{n}$ nên ta chọn $\vec{n}_\beta = [\vec{u}, \vec{n}] = (-2; 8; -4)$. Ngoài ra, (β) đi qua d nên cũng đi qua điểm A(2; −1; 1). Do đó (β) có phương trình:

$$-2(x-2) + 8(y+1) - 4(z-1) = 0 \text{ hay } -x + 4y - 2z + 8 = 0.$$

Hình chiếu d′ qua I, và có vectơ chỉ phương:

$$\vec{a} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-6; 3; 9) = 3(-2; 1; 3)$$

Vậy d′ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} - 2t \\ y = t \\ z = \dfrac{8}{3} + 3t \end{cases}$

33. *Cho đường thẳng Δ và mp(P) có phương trình :*

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \; ; (P) : 2x + z - 5 = 0.$$

a) Xác định toạ độ giao điểm A của Δ và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ

Giải

a) Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Thay x, y, z vào phương trình của mp(P) ta được:

$$2(1 + t) + 3 + 2t - 5 = 0 \Rightarrow t = 0$$

Vậy giao điểm của Δ và mp(P) là A(1; 2; 3).

b) Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ. Vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ của d phải vuông góc với chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$ của Δ đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; 1)$ của (P) nên ta chọn $\vec{u}' = [\vec{u}, \vec{n}] = (2; 3; -4)$.

Vậy d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

34. *a) Tính khoảng cách từ điểm M(2 ; 3 ; 1) đến đường thẳng Δ có phương trình:* $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

b) Tính khoảng cách từ điểm N(2 ; 3 ; –1) đến đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(-\dfrac{1}{2}; 0; -\dfrac{3}{4}\right)$ *và có vectơ chỉ phương* $\vec{u}\,(-4 ; 2 ; -1)$.

Giải

a) Đường thẳng Δ đi qua $M_0(-2; 1; -1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (4; 2; 2)$; $[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}] = (8; -10; -6)$.

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d = \dfrac{\left|[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $\overrightarrow{M_0N} = \left(\frac{5}{2}; 3; -\frac{1}{4}\right)$; $[\vec{u}, \overrightarrow{M_0N}] = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; 17\right)$

Vậy khoảng cách cần tìm là:

$$d = \frac{\left|[\vec{u}, \overrightarrow{M_0N}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 17^2}}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2870}}{14}$$

35. *Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau :*

a) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ *và d':* $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 \end{cases}$

b) d: $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2}$ *và d':* $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t'. \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_1(1; -1; 1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1; 0)$. Đường thẳng d′ đi qua điểm $M_2(2; -2; 3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$. Vì $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương nhưng $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; -1; 2)$ nên hai đường thẳng đó song song.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng khoảng cách từ M_1 tới d′ và bằng $\frac{\left|[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_2]\right|}{|\vec{u}_2|} = 2$

b) Đường thẳng d qua M(0; 4; −1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; -2)$. Đường thẳng d′ qua M′(0; 2; −4) có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (-1; 3; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (0; -2; -3)$; $[\vec{u}, \vec{u}'] = (9; 5; -2)$.

$\Rightarrow [\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ d và d′ chéo nhau.

Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là:

$$d = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{u}, \vec{u}']\right|} = \frac{4}{\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{110}} = \frac{2\sqrt{110}}{55}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Giả sử d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): x − 2y + 3z − 4 = 0 và (Q): 3x + 2y − 5z − 4 = 0. Viết phương trình tham số và chính tắc của d.*

2. *d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): 3x + y − 2z − 7 = 0, (Q): x + 3y − 2z + 3 = 0.*

Viết phương tình chính tắc của đường thẳng đi qua M(2; 3; –5) và song song với d.

Đáp số: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{2}$

3. *Chứng tỏ rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $5x-3y+2z-5=0$ và (Q): $2x-y-z-1=0$ nằm trong mặt phẳng (R): $4x-3y+7z-7=0$.*
Hướng dẫn: Tìm A, B $\in$ (P) $\cap$ (Q) rồi chứng minh A, B $\in$ (R).

4. *Chứng minh rằng hai đường thẳng:*

$$d_1 = \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 7+3t \\ y = 2+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$$

cùng nằm trong một mặt phẳng. Lập phương trình mặt phẳng ấy.

5. *Viết phương trình đường thẳng đi qua A (3; 2; 1), vuông góc và cắt đường thẳng* $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+3}{1}$.

6. *Tìm phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng* $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ *lên mặt phẳng $x+2y+3z+4=0$.*

7. *Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng:*

$$\Delta_1: \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1};\ \Delta_2: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

8. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong đó d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $2x-z-1=0$, (Q): $-x-y+4=0$, d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng: (R): $3x+y-2=0$, (S): $3y+3z-6=0$*

9. *Tìm góc giữa đường thẳng Δ và mp(α): với* $\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \\ z = 2-t \end{cases}$ *; (α): $2x-y+2z-1=0$*

10. *Cho tứ diện ABCD với A(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Tính chiều cao của tứ diện ABCD kẻ từ A.*

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. *Cho bốn điểm A(1 ; 6 ; 2), B(4 ; 0 ; 6), C(5 ; 0 ; 4), D(5 ; 1 ; 3).*
   a) *Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.*
   b) *Tính thể tích tứ diện ABCD.*
   c) *Viết phương trình mp(BCD).*
   d) *Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD). Tìm toạ độ tiếp điểm.*

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -6; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (4; -5; 1)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}\right) = (12; 10; 6)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 12.4 - 5.10 + 6.1 = 4 \neq 0$$

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng nên ABCD là hình tứ diện.

b) Thể tích tứ diện ABCD là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

c) Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 0; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 1; -3)$.

$$\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (2; 1; 1)$$

Mp(BCD) qua B(4; 0; 6) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình:

$$2(x - 4) + 1.(y - 0) + 1.(z - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 14 = 0$$

d) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD) có bán kính

$$R = d(A,(BCD)) = \frac{|2.1 + 1.6 + 1.2 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Phương trình mặt cầu là: $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 + (z - 2)^2 = \dfrac{8}{3}$

Gọi H là tiếp điểm thì AH là đường thẳng đi qua A vuông góc với mp(BCD) nên có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (2; 1; 1)$. Vậy AH có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Thay x, y, z vào phương trình mp(BCD) ta được:

$$2(1 + 2t) + 6 + t + 2 + t - 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } H\left(\frac{7}{3}; \frac{20}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

2. *Cho hai điểm A(1 ; −1 ; −2), B(3 ; 1 ; 1) và mặt phẳng (P) : x − 2y + 3z − 5 = 0.*

a) Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng với điểm A qua mp(P).

b) Tìm góc giữa đường thẳng AB và mp(P).

c) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mp(P).

d) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB và mp(P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua I và vuông góc với AB.

Giải

a) Điểm $A'(x_0; y_0; z_0)$ đối xứng với A qua mp(P) khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} = (x_0 - 1; y_0 + 1; z_0 + 2)$ là vectơ pháp tuyến của (P) và trung điểm

$I\left(\frac{x+1}{2};\ \frac{y_0-1}{2};\ \frac{z_0-2}{2}\right)$ của AA′ nằm trên (P). Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0+1}{-2}=\dfrac{z_0+2}{3} \\ \dfrac{x_0+1}{2}-2.\dfrac{y_0-1}{2}+3.\dfrac{z_0-2}{2}-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{15}{7} \\ y_0=-\dfrac{23}{7} \\ z_0=\dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Vậy $A'\left(\frac{15}{7};\ -\frac{23}{7};\ \frac{10}{7}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;3)$; mp(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-2;3)$ Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mp(P) ta có $0\le\varphi\le 90^0$

và $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\vec{n}_P\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\vec{n}_P\right|}=\dfrac{|2-4+9|}{\sqrt{17.14}}=\dfrac{7}{\sqrt{238}}$

c) Gọi $\vec{n}_Q$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q) thì $\vec{n}_Q\perp\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}_Q\perp\vec{n}_P$ nên chọn $\vec{n}_Q=[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P]=(12;-3;-6)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là:

$$12(x-1)-3(y+1)-6(z+2)=0\Leftrightarrow 4x-y-2z-9=0$$

d) Tọa độ của I thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=-2+3t \\ x-2y+3z-5=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow\quad 1+2t-2(-1+2t)+3(-2+3t)-5=0\Rightarrow t=\frac{8}{7}$$

Vậy $I\left(\frac{23}{7};\ \frac{9}{7};\ \frac{10}{7}\right)$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ thì $\vec{u}\perp\vec{n}_P$ và $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ nên chọn $\vec{u}=[\vec{n}_P;\overrightarrow{AB}]=(-12;3;6)=-3(4;-1;-2)$.

Vậy Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=\dfrac{23}{7}+4t \\ y=\dfrac{9}{7}-t \\ z=\dfrac{10}{7}-2t \end{cases}$

3. *Cho đường thẳng d và mp(P) có phương trình :*

$$d : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases} \qquad (P) : x - 3y + z - 1 = 0.$$

a) Viết phương trình đường thẳng d′ là hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

b) Viết phương trình đường thẳng d_1 là hình chiếu song song của d trên mp(P) theo phương Oz.

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, cắt d và song song với mp(P).

Giải

a) Đường thẳng d đi qua $M_0\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{-11}{3}; 0\right)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

Mp(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -3; 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P) thì $d' = (P) \cap (Q)$ là hình chiếu của d lên (P). Mp(Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q \perp \vec{u}$ và $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$. Vì $[\vec{u}, \vec{n}_P] = (4; 0; -4)$ nên chọn $\vec{n}_Q = (1; 0; -1)$. (Q) chứa d nên (Q) qua $M_0\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{-11}{3}; 0\right)$ do đó (Q) có phương trình $x - \dfrac{2}{3} - z = 0 \Leftrightarrow 3x - 3z - 2 = 0$.

Ta có d′: $\begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0 \\ 3x - 3z - 2 = 0 \end{cases}$

Cho $z = 0$ ta có $x = \dfrac{2}{3}$; $y = -\dfrac{1}{9}$ nên $A\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{9}; 0\right) \in d'$ và d′ có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right) = (9; 6; 9) = 3(3; 2; 3)$.

Phương trình tham số của d′ là: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + 3t \\ y = -\dfrac{1}{9} + 2t \\ z = 3t \end{cases}$

b) Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và song song với Oz (hoặc chứa Oz) thì $d_1 = (P) \cap (R)$.

Mp(R) đi qua $M_0\left(\frac{2}{3};\frac{-11}{3};0\right)$ và có vectơ pháp tuyến vuông góc với cả $\vec{u}=(1;1;1)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$ (vectơ chỉ phương của Oz) nên $\vec{n}_R=[\vec{u},\vec{k}]=(1;-1;0)$.

Mp(R) có phương trình là

$$1.\left(x-\frac{2}{3}\right)-1.\left(y+\frac{11}{3}\right)=0\Leftrightarrow 3x-3y-13=0$$

Ta có $d_1:\begin{cases}x-3y+z-1=0\\3x-3y-13=0\end{cases}$

Cho $y=0$ ta có $x=\frac{13}{3}$; $z=-\frac{10}{3}$ suy ra $B\left(\frac{13}{3};\ 0;\ -\frac{10}{3}\right)\in d_1$

d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{V}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=\left(\begin{vmatrix}-3&1\\-3&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-3\\3&-3\end{vmatrix}\right)$

$$=(3;3;6)=3(1;1;2)$$

Vậy d_1 có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=\frac{13}{3}+t\\y=t\\z=\frac{-10}{3}+2t\end{cases}$

c) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua gốc O và song song với mp(P) thì (P′) có phương trình: $x-3y+z=0$. Giao điểm I của đường thẳng d và mp(P′) có tọa độ thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x=\frac{2}{3}+t\\y=-\frac{11}{3}+t\\z=t\\z-3y+z=0\end{cases}\Rightarrow I=\left(\frac{37}{3};8;\frac{35}{3}\right)$

Đường thẳng đi qua O và I là đường thẳng cần tìm, nó có phương trình:

$$\frac{x}{\frac{37}{3}}=\frac{y}{8}=\frac{z}{\frac{35}{3}}\text{ hay }\frac{x}{37}=\frac{y}{24}=\frac{z}{35}$$

4. *Cho điểm A(2 ; 3 ; 1) và hai đường thẳng :*

$$d_1:\begin{cases}x=-2-t\\y=2+t\\z=2t\end{cases}\quad \text{và } d_2:\ \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}.$$

a) Viết phương trình mp(P) đi qua A và d_1.

b) Viết phương trình mp(Q) đi qua A và d_2.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A cắt cả d_1 và d_2.

d) Tính khoảng cách từ A đến d_2.

Giải

a) Đường thẳng d_1 qua $M_1(-2; 2; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1; 1; 2)$. Mp(P) qua A và d_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = [\overrightarrow{AM_1}; \vec{u}_1] = (-1; 9; -5)$

Vậy mp(P) có phương trình:

$$-(x + 2) + 9(y - 2) - 5z = 0 \Leftrightarrow x - 9y + 5z + 20 = 0$$

b) Đường thẳng d_2 qua $M_2(-5; 2; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (3; -1; 1)$. Mp(Q) qua A và d_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AM_2}, \vec{u}_2] = (-2; 4; 10)$.

Vậy mp(Q) có phương trình:

$$-2(x + 5) + 4(y - 2) + 10z = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5z + 9 = 0$$

c) Đường thẳng d đi qua A, cắt cả d_1 và d_2 nên d nằm trên cả hai mặt phẳng (P) và (Q), tức là d gồm những điểm có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

Đặt x = t ta được hệ $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{29}{11} + \dfrac{2}{11}t \\ z = \dfrac{41}{55} + \dfrac{7}{55}t \end{cases}$

Đây là phương trình tham số của đường thẳng d, d và d_1 cùng thuộc mp(P) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên cắt nhau. d và d_2 cùng thuộc mp(Q) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên cắt nhau.

d) Khoảng cách từ A đến d_2 là: $d = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AM_2}, \vec{u}_2]\right|}{|\vec{u}_2|} = \dfrac{\sqrt{4 + 16 + 100}}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{11}}$

5. *Cho hai đường thẳng :* $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 6}{3}$ *và* $d': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

a) Chứng minh hai đường thẳng đó chéo nhau. Tìm góc giữa chúng.

b) Tìm khoảng cách giữa d và d'.

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

d) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả d và d′.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua M(0; 1; 6) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 3)$. Đường thẳng d′ đi qua M′(1; –2; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (1; 1; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1; -3; -3)$; $[\vec{u}, \vec{u}'] = (-5; 4; -1)$.

$$\Rightarrow \quad [\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} = -5.1 - 3.4 + 1.3 = -14 \neq 0$$

Vậy hai đường thẳng d và d′ chéo nhau: Vì $\vec{u}, \vec{u}' = 0$ nên $d \perp d'$.

b) Gọi h là khoảng cách giữa d và d′ ta có:

$$h = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{u}, \vec{u}']\right|} = \frac{14}{\sqrt{25+16+1}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

c) d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

Lấy điểm N(t; 1 + 2t; 6 + 3t) ∈ d và N′(1 + t′; –2 + t′; 3 – t′) ∈ d′

NN′ là đường vuông góc chung của d và d′ khi và chỉ khi $\overrightarrow{NN'} \perp \vec{u}$ và $\overrightarrow{NN'} \perp \vec{u}'$. Ta có:

$$\overrightarrow{NN'} = (1 + t' - t; -3 + t' - 2t; -3 - t' - 3t)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{NN'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{NN'}.\vec{u}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t' - t + 2(-3 + t' - 2t) + 3(-3 - t' - 3t) = 0 \\ 1 + t' - t - 3 + t' - 2t + 3 + t' + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14 - 14t = 0 \\ 1 + 3t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy N(–1; –1; 3) và $N'\left(\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$

$$\overrightarrow{NN'} = \left(\frac{5}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Phương trình đường vuông góc chung qua N(–1; –1; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = 3\overrightarrow{NN'} = (5; -4; 1)$ nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 - 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

d) Giả sử đường thẳng Δ song song với Oz, cắt d và d' lần lượt tại A và B.

Khi đó ta có $A(t;\ 1 + 2t;\ 6 + 3t)$, $B(1 + t';\ -2 + t';\ 3 - t')$.

và $\vec{AB} = (1 + t' - t;\ -3 + t' - 2t;\ -3 - t' - 3t)$.

Vì $\vec{AB}$ cùng phương với $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$ nên $1 + t' - t = -3 + t' - 2t = 0$, suy ra $t = -4$ và $t' = -5$.

Vậy $A(-4;\ -7;\ -6)$ và $\vec{AB} = (0;\ 0;\ 14)$.

Vậy phương trình của Δ là: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6 + t \end{cases}$

6. *Cho hai đường thẳng : d :* $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ *và d' :* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$.

a) Chứng minh rằng d và d' đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa chúng.

b) Tính thể tích hình tứ diện giới hạn bởi mp(P) và ba mặt phẳng toạ độ.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nói trên.

Giải

a) Đường thẳng d qua M(7; 2; 1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;\ 2;\ -2)$. Đường thẳng d' qua M'(1; −2; 5) có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (2;\ -3;\ 4)$.

Ta có $\vec{MM'} = (-6;\ -4;\ 4)$.

$$[\vec{u}, \vec{u}'] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (2;\ -16;\ -13)$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{u}, \vec{u}'].\vec{MM'} = -2.6 + 16.4 - 13.4 = 0.$$

Vậy d và d' đồng phẳng. $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau. Mp(P) chứa d và d' đi qua M(7; 2; 1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{u}'] = (2;\ -16;\ -13)$ do đó (P) có phương trình là:

$$2(x - 7) - 16(y - 2) - 13(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

b) Giao điểm của mp(P) với các trục tọa độ là:

$$A\left(\frac{-31}{2};\ 0;\ 0\right);\ B\left(0;\ \frac{31}{16};\ 0\right);\ C\left(0;\ 0;\ \frac{31}{13}\right)$$

Thể tích tứ diện OABC là: $V = \dfrac{1}{6}OA.OB.OC = \dfrac{1}{6}.\dfrac{31}{2}.\dfrac{31}{16}.\dfrac{31}{13} = \dfrac{31^3}{2496}$

c) Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC đi qua O nên phương trình có dạng: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$.

Vì A, B, C ∈ (S) nên: ta có: $\begin{cases} a = \dfrac{-31}{4} \\ b = \dfrac{31}{32} \\ c = \dfrac{31}{26} \end{cases}$

Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{31}{2}x - \dfrac{31}{16}y - \dfrac{31}{13}z = 0$.

7. *Cho hai đường thẳng :* $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 6 + t \end{cases}$ *và* $d': \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d và d' chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mp(P) đi qua d và vuông góc với d', phương trình của mp(Q) đi qua d' và vuông góc với d.

c) Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của d và d'.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua M(0; 3; 6) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 1)$. Đường thẳng d' đi qua M'(2; 1; 2) có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (1; -1; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2; -2; -4)$; $[\vec{u}, \vec{u'}] = (1; 2; -1)$

$\Rightarrow [\vec{u}, \vec{u'}].\overrightarrow{MM'} = 2 - 4 + 4 = 2 \neq 0$

Vậy d và d' chéo nhau.

Ta có $\vec{u}.\vec{u'} = 1 + 0 - 1 = 0$ nên $d \perp d'$.

b) (P) đi qua M(0; 3; 6) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (1; -1; -1)$ nên có phương trình: $x - (y - 3) - (z - 6) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 9 = 0$

(Q) đi qua M'(2; 1; 2) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$ nên có phương trình: $(x - 2) + z - 2 = 0 \Leftrightarrow x + z - 4 = 0$.

c) Đường vuông góc chung Δ của d và d' là giao tuyến của mp (P) và mp(Q)

nên Δ: $\begin{cases} x - y - z + 9 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$

Cho x = 0 ta có y = 5, z = 4 suy ra A(0; 5; 4) ∈ Δ, Δ có vectơ chỉ phương

$$\vec{v} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1; -2; 1)$$

Phương trình chính tắc của Δ là: $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-4}{1}$

8. *Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình :*

$(P): 2x - y + z + 2 = 0$ *và* $(Q): x + y + 2z - 1 = 0.$

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) cắt nhau. Tìm góc giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(1 ; 2 ; −3), song song với cả (P) và (Q).

c) Viết phương trình mp(R) đi qua B(−1 ; 3 ; 4), vuông góc với cả (P) và (Q).

Giải

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n_P} = (2; -1; 1)$ và $\vec{n_Q} = (1; 1; 2)$. Vì hai vectơ đó không cùng phương nên (P) và (Q) cắt nhau. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó thì:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n_P}.\vec{n_Q}\right|}{\left|\vec{n_P}\right|\left|\vec{n_Q}\right|} = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\varphi = 60^0$.

b) Đường thẳng d song song với cả (P) và (Q) phải có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với cả $\vec{n_P}$ và $\vec{n_Q}$. Vì $\left[\vec{n_P}, \vec{n_Q}\right] = (-3; -3; 3)$ nên có thể lấy $\vec{u} = (1; 1; -1)$. Ngoài ra, điểm A(1; 2; −3) không nằm trên cả (P) và (Q) nên đường thẳng d cần tìm có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$$

c) (R) ⊥ (P) và (R) ⊥ (Q) nên (R) ⊥ d.

Suy ra (R) đi qua B(−1; 3; 4) và có vectơ pháp tuyến $\vec{u} = (1; 1; -1)$ nên (R) có phương trình: $x + 1 + y - 3 - (z - 4) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$

9. *Cho mặt cầu (S) có phương trình :* $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$

a) Tìm toạ độ tâm mặt cầu và tìm bán kính mặt cầu.

b) Tuỳ theo giá trị k, xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mp(P) : $x + y - z + k = 0.$

c) Mặt cầu cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại ba điểm A, B, C khác với gốc toạ độ O. Viết phương trình mp(ABC).

d) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B.

e) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình $4x + 3y - 12z - 1 = 0.$

Giải

a) Ta có (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

Mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ và có bán kính $R=\sqrt{14}$

b) Khoảng cách từ tâm I đến mp(P) là: $d=\dfrac{|1+2-3-k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{3}}$

i) $\dfrac{|k|}{\sqrt{3}}<\sqrt{14}\Leftrightarrow|k|<\sqrt{42}$: (P) cắt (S) theo một đường tròn.

ii) $\dfrac{|k|}{\sqrt{3}}=\sqrt{14}\Leftrightarrow|k|=\sqrt{42}$: (P) tiếp xúc với (S).

iii) $\dfrac{|k|}{\sqrt{3}}>\sqrt{14}\Leftrightarrow|k|>\sqrt{42}$: (P) không cắt (S).

c) (S) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác O) thì $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$

Phương trình mp(ABC) là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1$.

d) Mp(α) tiếp xúc với (S) tại B thì (α) qua B và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IB}=(-1; 2; -3)$

Vậy (α): $-(x-0)+2(y-4)-3(z-0)=0\Leftrightarrow x-2y+3z+8=0$

e) Mp(Q') // mp(Q) nên (Q') có phương trình: $4x+3y-12z+D=0$ $(D\neq-1)$

(Q') tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(Q'))=R\Leftrightarrow\dfrac{|4.1+3.2-12.3+D|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\sqrt{14}$

$$\Leftrightarrow\frac{|D-26|}{13}=\sqrt{14}\Leftrightarrow D=26\pm13\sqrt{14}$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $4x+3y-12z+26\pm13\sqrt{14}=0$.

10. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Trên các tia AA', AB, AD (có chung gốc A) lần lượt lấy các điểm M, N, P khác A sao cho AM = m, AN = n và AP = p.*

a) Tìm sự liên hệ giữa m, n và p sao cho mp(MNP) đi qua đỉnh C' của hình lập phương.

b) Trong trường hợp mp(MNP) luôn đi qua C', hãy tìm thể tích bé nhất của tứ diện AMNP. Khi đó tứ diện AMNP có tính chất gì ?

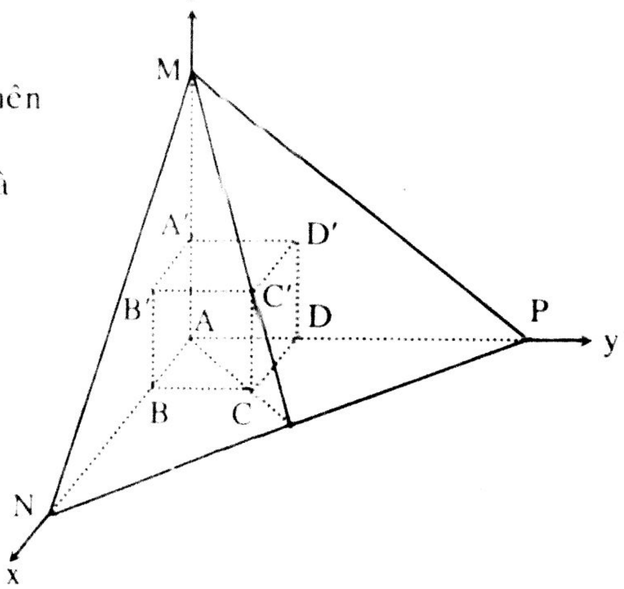
Giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O trùng A, các tia Ox, Oy và Oz lần lượt chứa các điểm B, D và A'. Khi đó ta có

A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1)

C'(1; 1; 1), M(0; 0; m), N(n; 0; 0), P(0; p; 0).

a) Mặt phẳng (MNP) có phương trình theo đoạn chắn $\frac{x}{n} + \frac{y}{p} + \frac{z}{m} = 1$ nên mặt phẳng đó đi qua đỉnh C' khi và chỉ khi: $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1$ (*)



b) Thể tích tứ diện AMNP là $V = \frac{1}{6}AM.AN.AP = \frac{1}{6}mnp$ (trong đó m, n, p là các số dương thỏa mãn điều kiện (*)). Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương, ta có:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Leftrightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Leftrightarrow \frac{1}{mnp} \leq \frac{1}{3^3} \Leftrightarrow mnp \geq 27.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} = \frac{1}{p} = \frac{1}{3}$, tức là m = n = p = 3. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của thể tích V là $\frac{27}{6}$, khi đó hình chóp A.MNP là hình chóp đều.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. *Cho ba điểm M(2 ; 0 ; 0), N(0 ; –3 ; 0), P(0 ; 0 ; 4). Nếu MNPQ là một hình bình hành thì toạ độ của điểm Q là :*

(A) (–2 ; –3 ; 4) ; *(B) (3 ; 4 ; 2) ;*

(C) (2 ; 3 ; 4) ; *(D) (–2 ; –3 ; –4).*

2. *Cho ba điểm A(1 ; 2 ; 0), B(1 ; 0 ; –1), C(0 ; –1 ; 2). Tam giác ABC là*

(A) Tam giác cân đỉnh A ; *(B) Tam giác vuông đỉnh A ;*

(C) Tam giác đều ; *(D) Không phải như (A), (B), (C).*

3. *Cho tam giác ABC có* $A = (1 ; 0 ; 1)$, $B = (0 ; 2 ; 3)$, $C = (2 ; 1 ; 0)$. *Độ dài đường cao tam giác kẻ từ C là*

(A) $\sqrt{26}$; *(B)* $\frac{\sqrt{26}}{2}$; *(C)* $\frac{\sqrt{26}}{3}$; *(D)* 26.

4. *Ba đỉnh của một hình bình hành có toạ độ là* $(1 ; 1 ; 1)$, $(2 ; 3 ; 4)$, $(6 ; 5 ; 2)$. *Diện tích của hình bình hành đó bằng*

(A) $2\sqrt{83}$; *(B)* $\sqrt{83}$; *(C)* 83 ; *(D)* $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

5. *Cho* $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ *và* $D(-2 ; 1 ; -1)$. *Thể tích của tứ diện ABCD là*

(A) 1 ; *(B)* 2 ; *(C)* $\frac{1}{3}$; *(D)* $\frac{1}{2}$.

6. *Cho* $A(-1 ; -2 ; 4)$, $B(-4 ; -2 ; 0)$, $C(3 ; -2 ; 1)$ *và* $D(1 ; 1 ; 1)$. *Độ dài đường cao của tứ diện ABCD kẻ từ đỉnh D là*

(A) 3 ; *(B)* 1 ; *(C)* 2 ; *(D)* $\frac{1}{2}$.

7. *Cho bốn điểm* $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(1 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 2)$ *và* $D(2 ; 2 ; 1)$. *Tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là*

(A) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$; *(B)* $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

(C) $(3 ; 3 ; 3)$; *(D)* $(3 ; -3 ; 3)$.

8. *Bán kính mặt cầu tâm* $I(3 ; 3 ; -4)$ *tiếp xúc với trục Oy bằng :*

(A) 5 ; *(B)* 4 ; *(C)* $\sqrt{5}$; *(D)* $\frac{5}{2}$.

9. *Mặt cầu tâm* $I(2 ; 1 ; -1)$ *tiếp xúc với mặt phẳng toạ độ (Oyz) có phương trình là :*

(A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$;
(B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$;
(C) $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$;
(D) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

10. *Cho ba điểm* $A(1 ; 1 ; 3)$, $B(-1 ; 3 ; 2)$ *và* $C(-1 ; 2 ; 3)$. *Mặt phẳng (ABC) có phương trình là*

(A) $x + 2y + 2z - 3 = 0$; *(B)* $x - 2y + 3z - 3 = 0$;
(C) $x + 2y + 2z - 9 = 0$; *(D)* $x^2 + 2y + 2z + 9 = 0$.

11. *Cho ba điểm* $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 0)$ *và* $C(0 ; 0 ; 3)$. *Phương trình nào sau đây* ***không phải*** *là phương trình mặt phẳng (ABC)?*

(A) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$; (B) $6x + 3y + 2z - 6 = 0$;

(C) $6x + 3y + 2z + 6 = 0$; (D) $12x + 6y + 4z - 12 = 0$.

12 *Cho hai điểm A(1, 3, –4) và B(–1, 2, 2). Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là :*

(A) $4x + 2y - 12z - 17 = 0$; (B) $4x + 2y + 12z - 17 = 0$;

(C) $4x - 2y - 12z - 17 = 0$; (D) $4x - 2y + 12z + 17 = 0$.

13 *Cho A(a ; 0 ; 0), B(0 ; b ; 0), C(0 ; 0 ; c), a, b, c là những số dương thay đổi sao cho* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. *Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định có toạ độ là*

(A) $(1 ; 1 ; 1)$; (B) $(2 ; 2 ; 2)$;

(C) $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$; (D) $\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

14 *Cho điểm A(–1 ; 2 ; 1) và hai mặt phẳng (P) :* $2x + 4y - 6z - 5 = 0$ *và (Q) :* $x + 2y - 3z = 0$. *Mệnh đề nào sau đây là đúng ?*

(A) Mp(Q) qua A và song song với (P) ;

(B) Mp(Q) không qua A và song song với (P) ;

(C) Mp(Q) qua A và không song song với (P) ;

(D) Mp(Q) không qua A và không song song với (P).

15 *Cho điểm A(1 ; 2 ; –5). Gọi M, N, P là hình chiếu của A lên ba trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là*

(A) $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 1$; (B) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$;

(C) $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 0$; (D) $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} + 1 = 0$.

16 *Cho mặt cầu (S) :* $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$ *và mặt phẳng (P) :* $3x - 2y + 6z + 14 = 0$. *Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (P) là :*

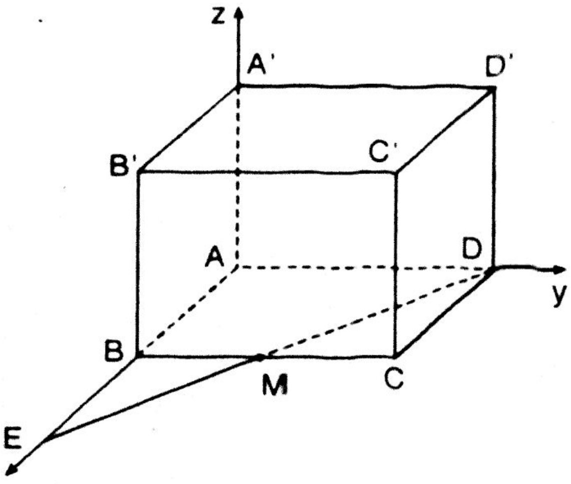
(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

17 *Mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C, trọng tâm tam giác ABC là G(–1 ; –3 ; 2). Phương trình mặt phẳng (P) là*

(A) $x + y - z - 5 = 0$; (B) $2x - 3y - z - 1 = 0$;

(C) $x + 3y - 2z + 1 = 0$; (D) $6x + 2y - 3z + 18 = 0$.

18. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (A'MD).



Một học sinh giải như sau :

Bước 1. Chọn hệ trục toạ độ như hình bên. Kéo dài DM cắt AB tại E. Khi đó

$A = (0 ; 0 ; 0)$, $E = (2 ; 0 ; 0)$,
$D = (0 ; 1 ; 0)$, $A' = (0 ; 0 ; 1)$.

Bước 2. Viết phương trình mặt phẳng (A'MD) :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 2 = 0$$

Bước 3. Khoảng cách $d(A ; (A'MD)) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{2}{3}$.

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ;
(C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

19. Cho hai điểm $A(1 ; -1 ; 5)$ và $B(0 ; 0 ; 1)$ Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với Oy có phương trình là

(A) $4x - z + 1 = 0$; (B) $4x + y - z + 1 = 0$;
(C) $2x + z - 5 = 0$; (D) $y + 4z - 1 = 0$.

20. Mặt phẳng (P) chứa trục Oz và điểm $A(2 ; -3 ; 5)$ có phương trình là

(A) $2x + 3y = 0$; (B) $2x - 3y = 0$;
(C) $3x + 2y = 0$; (D) $3x - 2y + z = 0$.

21. Cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y - 1 = 0$. Điểm $H(2 ; -1 ; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O trên một mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng :

(A) 30° ; (B) 45° ; (C) 60° ; (D) 90°.

22. Cho điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{4} = z + 3$. Phương trình mặt phẳng (A, d) là :

(A) $23x + 17y - z + 14 = 0$; (B) $23x - 17y - z + 14 = 0$;
(C) $23x + 17y + z - 60 = 0$; (D) $23x - 17y + z - 14 = 0$.

23. Cho $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

(A) d_1, d_2 *cắt nhau ;* *(B)* d_1, d_2 *trùng nhau ;*
(C) $d_1 // d_2$ *;* *(D)* d_1, d_2 *chéo nhau.*

24. *Cho mặt phẳng* $(\alpha) : x + 3y + z + 1 = 0$ *và đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. *Toạ độ giao điểm A của d và* (α) *là :*

(A) $A(3 ; 0 ; 4)$ *;* *(B)* $A(3 ; -4 ; 0)$ *;*
(C) $A(-3 ; 0 ; 4)$ *;* *(D)* $A(3 ; 0 ; -4)$.

25. *Cho đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$. *Phương trình nào sau đây cũng là phương trình của đường thẳng d ?*

(A) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$; *(B)* $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$; *(C)* $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$; *(D)* $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

26. *Cho hai điểm* $A(2 ; 3 ; -1)$ *và* $B(1 ; 2 ; 4)$ *và ba phương trình sau :*

(I) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$; *(II)* $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-5}$; *(III)* $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Chỉ có (I) là phương trình của đường thẳng AB ;

(B) Chỉ có (III) là phương trình của đường thẳng AB ;

(C) Chỉ có (I) và (II) là phương trình của đường thẳng AB ;

(D) Cả (I), (II) và (III) đều là phương trình của đường thẳng AB.

27. *Cho ba điểm* $A(1 ; 3 ; 2)$, $B(1 ; 2 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 3)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mp(ABC).*

Một học sinh giải như sau :

Bước 1. *Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là* $\begin{cases} x_G = \dfrac{1+1+1}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{3+2+1}{3} = 2 \\ z_G = \dfrac{2+1+3}{3} = 2. \end{cases}$

Bước 2. *Vectơ pháp tuyến của mp(ABC) là* $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3 ; 1 ; 0)$.

Bước 3. *Phương trình tham số của đường thẳng Δ là* $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2. \end{cases}$

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; *(B) Sai ở bước 1 ;*

(C) Sai ở bước 2 ; *(D) Sai ở bước 3.*

28. *Gọi d là đường thẳng qua gốc toạ độ O, vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường thẳng Δ :* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. *Phương trình của d là :*

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$; *(B)* $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$; *(C)* $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$; *(D)* $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = t. \end{cases}$

29. *Cho đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ *và mặt phẳng (P) :* $x + 2y - z + 3 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) d song song với (P) ; *(B) d cắt (P) ;*

(C) d vuông góc với (P) ; *(D) d nằm trên (P).*

30. *Cho điểm A(1 ; 1 ; 1) và đường thẳng d:* $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. *Hình chiếu của A trên d có toạ độ là*

(A) (2 ; –3 ; 1) ; *(B) (2 ; –3 ; –1) ;*

(C) (2 ; 3 ; 1) ; *(D) (–2 ; 3 ; 1).*

31. *Cho tứ diện ABCD có A(1 ; 0 ; 0), B(1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) và D(0 ; 0 ; 2). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.*

Một học sinh giải như sau :

Bước 1. $\overrightarrow{AC} = (-1 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{AB} = (0 ; 1 ; 0)$.

Bước 2. $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right] = (2 ; 2 ; 2)$

Bước 3. $d(AC, BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; *(B) Sai ở bước 1 ;*

(C) Sai ở bước 2 ; *(D) Sai ở bước 3.*

32 *Cho* $\left|\vec{u}\right| = 2, \left|\vec{v}\right| = 1, \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\pi}{3}$. *Góc giữa vectơ* $\vec{v}$ *và vectơ* $\vec{u} - \vec{v}$ *bằng*

(A) 30° ; *(B) 45° ;* *(C) 60° ;* *(D) 90°.*

33 *Cho* $\left|\vec{u}\right| = 2, \left|\vec{v}\right| = 5, \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\pi}{6}$. *Độ dài vectơ* $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$ *bằng*

(A) 10 ; *(B) 5 ;* *(C) 8 ;* *(D)* $5\sqrt{3}$.

34 *Mặt phẳng* $2x - 3y + z - 1 = 0$ *cắt các trục toạ độ tại các điểm :*

(A) $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; 1)$;

(B) $(1; 0; 0), \left(0; \frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; 1)$;

(C) $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; \frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; 1)$;

(D) $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right), (0; 0, -1)$.

35 *Cho đường thẳng : d :* $\begin{cases} x = -\frac{9}{5} - t \\ y = 5t \\ z = \frac{7}{5} + 3t \end{cases}$ *và mặt phẳng (P) :* $3x - 2y + 3z - 1 = 0$.

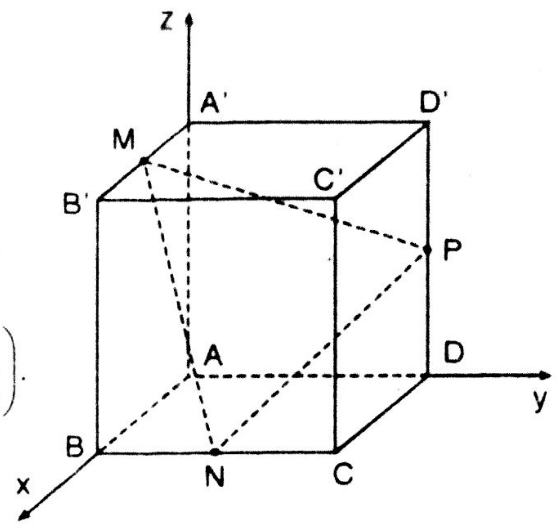
Gọi d' là hình chiếu của d trên (P). Trong các vectơ sau, vectơ nào ***không phải*** *là vectơ chỉ phương của d' ?*

(A) (5 ; –51 ; –39) ; *(B) (10 ; –102 ; –78) ;*

(C) (–5 ; 51 ; 39) ; *(D) (5 ; 51 ; 39).*

36 *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của A'B', BC, DD'. Chứng minh rằng* $AC' \perp (MNP)$.

Một học sinh giải như sau :



Bước 1. *Chọn hệ trục toạ độ như hình bên. Khi đó* $A = (0; 0; 0)$, $C' = (1; 1; 1)$,

$$M = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), N = \left(1; \frac{1}{2}; 0\right), P = \left(0; 1; \frac{1}{2}\right).$$

Bước 2. *Tính* $\overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1)$.

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; -1\right),\ \overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2} ; 1 ; -\frac{1}{2}\right).$$

Bước 3. $\begin{cases} \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \Rightarrow AC' \perp mp(MNP).$

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; *(B) Sai ở bước 1 ;*

(C) Sai ở bước 2 ; *(D) Sai ở bước 3.*

37. *Cho đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

Phương trình đường vuông góc chung của d và trục Ox là

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$; *(B)* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$; *(C)* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$; *(D)* $\begin{cases} x = \text{[illegible]} \\ y = \text{[illegible]} \\ z = \text{[illegible]} \end{cases}$

38. *Cho mặt phẳng (P) : $x - 2y - 3z + 14 = 0$ và điểm M(1 ; –1 ; 1). Toạ độ điểm M' đối xứng với M qua mp(P) là*

(A) (–1 ; 3 ; 7) ; *(B) (1 ; –3 ; 7) ;*

(C) (2 ; –3 ; –2) ; *(D) (2 ; –1 ; 1).*

39. *Cho điểm A(0 ; –1 ; 3) và đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$ *. Khoảng cách từ A đến d bằng*

(A) $\sqrt{3}$; *(B)* $\sqrt{14}$; *(C)* $\sqrt{6}$; *(D)* $\sqrt{\text{[illegible]}}$.

40. *Cho điểm M(–1 ; 2 ; –3). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz). Phương trình mp($M_1M_2M_3$) là*

(A) $6x + 2y + 3z + 6 = 0$; *(B) $6x - 2y + 3z + 6 = 0$;*

(C) $6x - 3y + 2z + 6 = 0$; *(D) $6x - 3y - 2z + 6 = 0$.*

41. *Cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) ?*

(A) $6x + 2y + 3z = 0$; *(B) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$;*

(C) $6x + 2y + 3z - 55 = 0$; *(D) $x + 2y + 2z - 7 = 0$.*

42. *Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Trong ba điểm (0 ; 0 ; 0), (1 ; 2 ; 3), (2 ; –1 ; –1), có bao nhiêu điểm nằm trong mặt cầu ?*

(A) 0 ; *(B) 1 ;* *(C) 2 ;* *(D) 3.*

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. MNPQ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 2 = 0 - x_Q \\ -3 - 0 = 0 - y_Q \\ 0 - 0 = 4 - z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 2 \\ y_Q = 3 \\ z_Q = 4 \end{cases}$

   Vậy Q(2; 3; 4). Chọn (C).

2. Ta có $AB = \sqrt{5}$; $AC = \sqrt{14}$; $BC = \sqrt{11}$. Chọn (D).

3. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là: $h = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]\right|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$. Chọn (C).

4. A(1; 1; 1), B(2; 3; 4), C(6; 5; 2)

   $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = 2\sqrt{83}$. Chọn (A).

5. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{2}$. Chọn (D).

6. Độ dài đường cao của tứ diện ABCD kẻ từ D là khoảng cách từ D đến mp (ABC). h = d(D, (ABC)) = 3. Chọn (A).

7. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có dạng:

   $$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \ (1)$$

   Thay tọa độ của A, B, C, D vào (1) rồi giải hệ tìm được $a = b = c = \dfrac{3}{2}$.

   Vậy tâm I của (S) là $I(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2})$. Chọn (B)

8. Hình chiếu của I trên trục Oy là I'(0; 3; 0)

   Khoảng cách từ I đến trục Oy bằng $R = II' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Chọn (A)

9. Mp(Oyz) có phương trình: x = 0

   Khoảng cách từ I đến mp(Oyz) là $R = \dfrac{|2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 2$. Chọn (A)

10. Mp(ABC) qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; 2; 2)$. Chọn (C)

11. Mp(ABC) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$. Chọn (C)

12. $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 6)$

    Trung điểm AB là: $I(0; \dfrac{5}{2}; -1)$

    Phương trình mặt phẳng trung trực AB qua I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$

nên có dạng: $-2(x-0)-(y-\frac{5}{2})+6(z+1)=0 \Leftrightarrow 4x+2y-12z-17=0$

Chọn (A)

13. Phương trình mp(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mp(ABC) đi qua điểm $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ cố định. Chọn (C)

14. $A \in (Q)$ và (Q) // (P). Chọn (A)

15. Ta có M(1; 0; 0); N(0; 2; 0); P(0; 0; −5)

Mp(MNP): $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-5}=1$. Chọn (A)

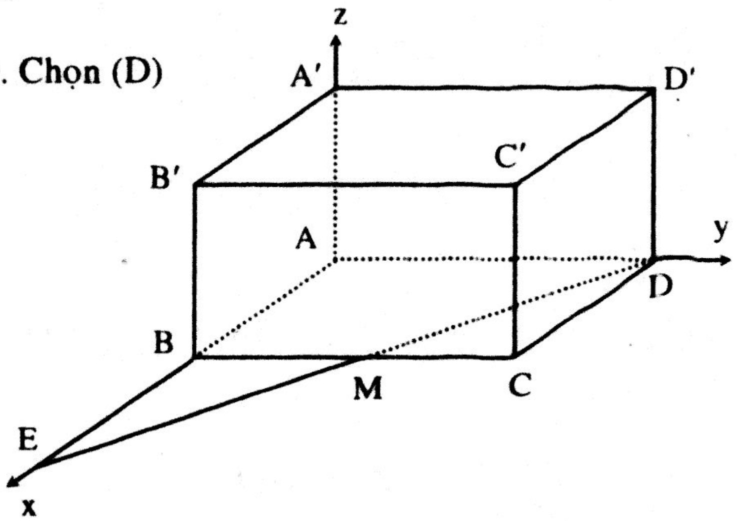
16. Tâm I(1; 1; 1)

$$d(I,(P))=\frac{|3-2+6+14|}{\sqrt{9+4+36}}=3.$$ Chọn (C)

17. Giả sử A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) thì $G(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3})$ suy ra a = −3; b = −9; c = 6.

Mp(ABC): $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-9}+\frac{z}{6}=1$

$\Leftrightarrow 6x+2y-3z+18=0$. Chọn (D)



18. Bài giải trên đúng.
Chọn (A)

19. Mp(P) qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\vec{j}]$ với $\vec{j}=(0;1;0)$. Chọn (A)

20. Mp(P) qua O và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=[\overrightarrow{OA},\vec{k}]$ với $\vec{k}=(0;0;1)$. Chọn (C)

21. (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{m}=\overrightarrow{OH}=(2;-1;-2)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;0)$

φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m}.\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$ Chọn (B)

22. d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; 1)$ và đi qua M(0; 1; −3)

Mp(A, d) qua A có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right]$. Chọn (B)

23. d_1, d_2 có cùng vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 3)$ và đi qua $A(1; 0; 3) \in d_1$, nhưng $A \notin d_2$. Vậy $d_1 // d_2$. Chọn (C)

24. Thay x, y, z từ d vào (α) ta có: $1 + t + 3(2 - t) + 2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2$.

Vậy A(3; 0; −4). Chọn (D)

25. d qua M(0; 1; 2) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$. Chọn (B).

26. Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 5)$. Chọn (D).

27. $\overrightarrow{AB} = (0; -1; -1)$; $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 1)$; $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3; 0; 0)$. Chọn (C).

28. Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; -3)$

d có vectơ phương $\vec{a} = \left[\vec{i}, \vec{u}\right] = (0; 3; -1)$. Chọn (D)

29. $A(3; -1; 4), B(-1; 0; 2) \in d$ và $A, B \in (P)$. Chọn (D)

30. Giả sử $H(6 - 4t, -2 - t, -1 + 2t)$ là hình chiếu của A trên d. Ta có: $\overrightarrow{AH}$ vuông góc với $\vec{u} = (-4; -1; 2)$ (là vectơ chỉ phương của d).

Ta có $\overrightarrow{AH} = (5 - 4t; -3 - t; -2 + 2t)$

$$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -4(5 - 4t) + 3 + t + 2(-2 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy H(2; −3; 1). Chọn (A)

31. Bài toán trên đúng. Chọn (A)

32. Ta có $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2.1.\frac{1}{2} = 1$

$$\Rightarrow \vec{v}.(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} - |\vec{v}|^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp (\vec{u} - \vec{v}).$$ Chọn (D)

33. $\left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 2.5.\frac{1}{2} = 5$. Chọn (B)

34. $y = z = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $x = z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

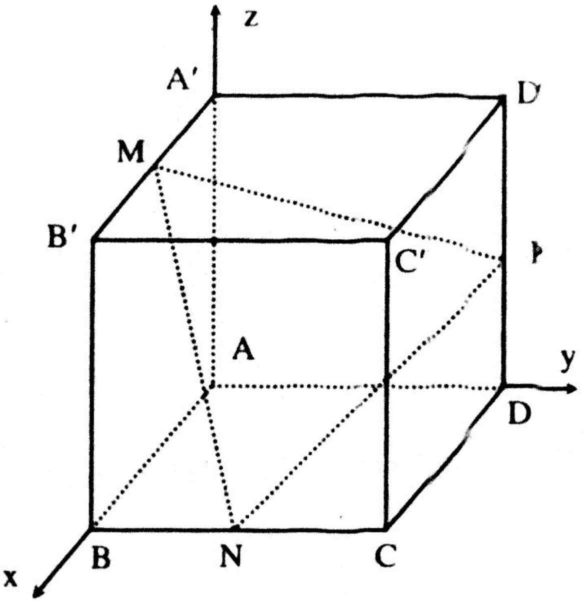
$x = y = 0 \Rightarrow z = 1$

Chọn (A)

35. Vì ba vectơ của (A), (B), (C) cùng phương nên chọn (D).

36. Bài giải trên đúng.

Chọn (A)



37. Phương trình tham số trục Ox là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Lấy P(0; t; 2 – t) ∈ d và Q(t'; 0; 0) ∈ Ox

$\overrightarrow{PQ} = (t'; -t; t - 2)$, d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; 1; -1)$

PQ là đường vuông góc chung của d và trục Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\vec{i} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t - t + 2 = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Vậy P(0; 1; 1), Q(0; 0; 0)

PQ có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$. Chọn (D)

38. (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; -3)$

M'(x; y; z) đối xứng với M qua mp(P) khi và chỉ khi $\overline{MM'}$ cùng phương với $\vec{n}$ và trung điểm I của MM' nằm trên (P).

Ta có hệ: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{-3} \\ \dfrac{x+1}{2} - 2.\dfrac{y+1}{2} - 3.\dfrac{z+1}{2} + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$. Chọn (A)

39. d đi qua M(1; 2; 0) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 0; -1)$

Khoảng cách từ A đến d bằng $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{14}$. Chọn (B)

40. $M_1(-1; 2; 3)$, $M_2(-1; -2; -3)$, $M_3(1; 2; -3)$; mp$(M_1M_2M_3)$ qua M_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]$. Chọn (C).

41. (S) có tâm $I(1; -3; 2)$, bán kính $R = 7$.

$d(I, (C)) = 7$. Chọn (C).

42. Lần lượt thay tọa độ ba điểm đã cho vào (S). Ta có $O \in (S)$. Chọn (B).

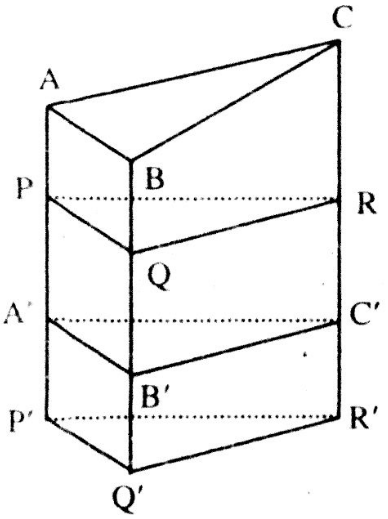
ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. *Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, với cạnh bên không vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên của hình lăng trụ và cắt chúng tại P, Q, R. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác PQR thành tam giác $P'Q'R'$.*

a) Chứng minh rằng thể tích V của hình lăng trụ đã cho bằng thể tích của hình lăng trụ $PQR.P'Q'R'$.

b) Chứng minh rằng $V = S_{PQR}.AA'$, trong đó S_{PQR} là diện tích tam giác PQR.

Giải



a) Mp(PQR) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành 2 khối đa diện H_1 và H_2 với H_1 chứa ΔABC, H chứa $\Delta A'B'C'$.

Mp $(A'B'C')$ chia khối lăng trụ $PQR.P'Q'R'$ thành hai khối đa diện H_2 và H_3 với H_3 chứa $\Delta P'Q'R'$.

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối đa diện H_1, H_2, H_3 ta có:

$V_{ABC.A'B'C'} = V_1 + V_2$; $V_{PQR.P'Q'R'} = V_2 + V_3$

Phép tịnh tiến $\overrightarrow{AA'}$: $T_{\overrightarrow{AA'}} : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

$T_{\overrightarrow{AA'}} : \Delta PQR \rightarrow \Delta P'Q'R'$

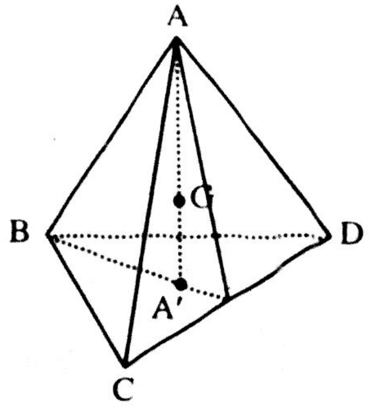
Suy ra $T_{\overrightarrow{AA'}} : H_1 \rightarrow H_3$ do đó $V_1 = V_3$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'}$

b) Vì lăng trụ $PQR.P'Q'R'$ là lăng trụ đứng có chiều cao $PP' = AA'$ nên $V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'} = S_{PQR}.AA'$

2. *Cho tứ diện ABCD có thể tích V. Hãy tính thể tích của hình tứ diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của tứ diện đã cho.*

Giải



Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Gọi $V(G; -\frac{1}{3})$ là phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\frac{1}{3}$. Ta có: $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$.

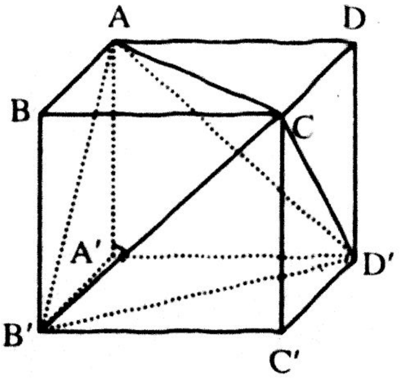
Suy ra: $V\left(G; -\frac{1}{3}\right)$: $A \rightarrow A'$

Tương tự: V: $B \rightarrow B'$
$C \rightarrow C'$
$D \rightarrow D'$

Do đó V: ABCD → A'B'C'D'. Vậy $V_{A'B'C'D'} = |k|^3 V_{ABCD} = \frac{1}{27}V$

3. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích V. Hãy tính thể tích của tứ diện ACB'D'.*

Giải

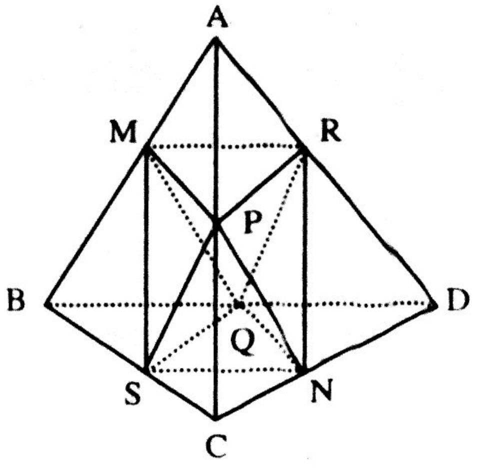


Các tứ diện BACB', C'B'CD', DD'AC, AA'B'D' đều có thể tích bằng $\frac{1}{6}V$

Do đó: $V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{V}{6} = \frac{V}{3}$

4. *Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình tứ diện đều đã cho là các đỉnh của một hình tám mặt đều. Hãy so sánh thể tích của tứ diện đều đã cho và thể tích của hình tám mặt đều đó.*

Giải



Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của tứ diện đều ABCD thì các tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều, vậy ta có hình tám mặt đều MNPQRS.

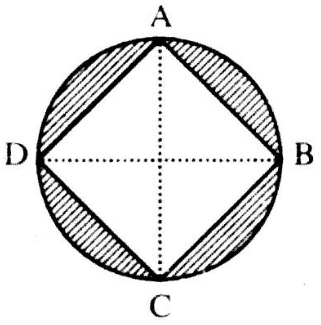
Vì các tứ diện AMPR, BMQS, CPSN, DQNR đều là những tứ diện đồng dạng với tứ diện ABCD với tỉ số $k = \frac{1}{2}$ nên có thể tích bằng $\frac{V}{8}$.

Suy ra $V_{MPRQSN} = V - 4.\frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

5. *Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi $\mathscr{H}$ là hình gồm các điểm của hình tròn (O ; R) nhưng không nằm trong hình vuông. Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi hình $\mathscr{H}$ khi quay quanh một đường chéo của hình vuông.*

Giải

Khi quay quanh đường chéo AC thì hình tròn (O; R) sinh ra khối cầu (S), đoạn thẳng BD sinh ra hình tròn ($\mathscr{C}$) và hình vuông ABCD sinh ra hình tròn xoay $\mathscr{K}$ gồm hai hình nón có chung đáy là ($\mathscr{C}$) với đỉnh là A và C. Do đó, H sinh ra khối tròn xoay gồm những điểm thuộc hình cầu (S) nhưng không thuộc $\mathscr{K}$ và thể tích V của khối đó là:

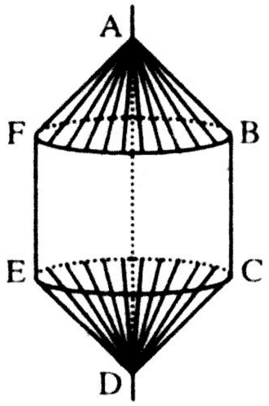


$$V = V_{(S)} - V_{(\mathscr{K})} = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

6. *Cho lục giác đều ABCDEF cạnh a.*
   - *a) Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng AD.*
   - *b) Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và DE.*

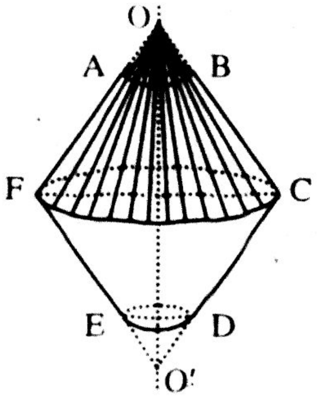
Giải

a) Khi quay lục giác đều ABCDEF quanh đường thẳng AD, ta được khối tròn xoay hợp bởi ba khối: khối nón $\mathfrak{N}_1$ sinh bởi tam giác ABF, khối trụ T sinh bởi hình chữ nhật BCEF và khối nón $\mathfrak{N}_2$ sinh bởi tam giác DCE. Hai khối nón và khối trụ đều có bán kính đáy là $R = \frac{BF}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khối trụ có chiều cao a và các khối nón có chiều cao $\frac{a}{2}$. Vậy khối tròn xoay sinh bởi lục giác đã cho có thể tích là:



$$V = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a + 2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{a}{2} = \pi a^3$$

b) Gọi Δ là đường thẳng nối trung điểm của AB và ED. Khi đó BC và AF cắt nhau tại điểm O trên Δ, CD và FE cắt nhau tại điểm O′ trên Δ. Gọi V, V_1, V_2 là thể tích của các khối tròn xoay lần lượt sinh ra bởi lục giác đều ABCDEF, tam giác OCF và tam giác OAB khi quay quanh Δ, ta có:



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$$

Do đó $V = 2(V_1 - V_2) = \dfrac{7\sqrt{3}\pi a^3}{12}$

7. *Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.*

a) Chứng minh rằng ABCD là tứ diện đều.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định (tức là khoảng cách từ các đường thẳng đó tới trục của mặt trụ bằng bán kính mặt trụ).

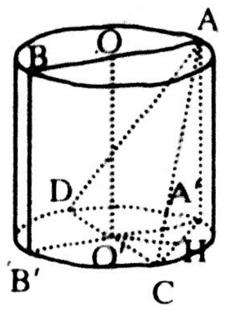
Giải

a) Gọi A′, B′ lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có đường kính CD, khi đó A′, B′ nằm trên đường tròn đáy.

Ta có A′B′ ⊥ CD nên A′CB′D là hình vuông có đường chéo CD = 2R nên $A'C = R\sqrt{2}$, mà $AA' = R\sqrt{2}$ nên ta suy ra AC = 2R.

Tương tự AD = BC = BD = 2R. Vậy ABCD là tứ diện đều.

b) Gọi O, O′ lần lượt là tâm của hai đường tròn đáy



Ta có: d(OO′, AC) = d(OO′, (AA′C) = O′H (với H là trung điểm của A′C). Vậy $d = O'H = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Tương tự khoảng cách giữa mỗi đường thẳng AD, BC, BD và OO′ đều bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Vậy các cạnh AC, AD, BC, BD đều tiếp xúc với mặt trụ có trục

OO′ và bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

8. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho các điểm A(1 ; 5 ; 3), B(4 ; 2 ; −5), C(5 ; 5 ; −1) và D(1 ; 2 ; 4).*

a) Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

c) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng đó.

d) Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).

e) Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -3; -8)$; $\overrightarrow{AC} = (4; 0; -4)$

$\overrightarrow{AD} = (0; -3; 1)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12)$; $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 72 \neq 0$

Vậy bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng

b) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2z + d = 0$$

Vì A, B, C, D ∈ (S) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + 25 + 9 - 2a - 10b - 6c + d = 0 \\ 16 + 4 + 25 - 8a - 4b + 10c + d = 0 \\ 25 + 25 + 1 - 10a - 10b + 2c + d = 0 \\ 1 + 4 + 16 - 2a - 4b - 8c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 3b - 8c = 5 \\ a - c = 2 \\ -3b + c = -7 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a = 1, b = 2, c = -1, d = -19$

Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; −1) và bán kính $R = \sqrt{1 + 4 + 1 + 19} = 5$

c) Mp(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; -20; 12) = 4(3; -5; 3)$

Mp(ABC) đi qua A(1; 5; 3) nên có phương trình

$$3(x - 1) - 5(y - 5) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + 3z + 13 = 0$$

Khoảng cách từ D đến mp(ABC) là: $h = \frac{|3.1 - 5.2 + 3.4 + 13|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{43}}$

d) Mặt phẳng (α) vuông góc với CD có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{CD} = (-4; -3; 5)$ nên có phương trình: $-4x - 3y + 5z + d = 0$

Mặt phẳng đó tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm I(1; 2; – 1) của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (α) bằng 5, tức là:

$$\frac{|-4.1-3.2-5.1+d|}{\sqrt{16+9+25}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|-15+d|}{\sqrt{50}} = 5 \Leftrightarrow d = 15 \pm 25\sqrt{2}$$

Vậy (α): $-4x - 2y + 5z + 15 \pm 25\sqrt{2} = 0$

e) Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; –1), mp(Oxy) có phương trình là z = 0. Khoảng cách từ I đến mp(Oxy) là $d_1 = |-1| = 1$ nên (S) cắt mp(Oxy) theo đường tròn có bán kính $r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$.

Tương tự mp(Oyz) có phương trình là x = 0. Khoảng cách từ I đến mp(Oyz) là $d_2 = |1| = 1$ nên (S) cắt mp(Oxy) theo đường tròn có bán kính $r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$.

Mp(Oxz) có phương trình là y = 0. Khoảng cách từ I đến mp(Oxz) là $d_3 = |2| = 2$ nên (S) cắt mp(Oxz) theo đường tròn có bán kính

$$r_3 = \sqrt{R^2 - d_3^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}.$$

9. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình :*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

a) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng toạ độ.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng x + 5y + z + 4 = 0 đi qua đường thẳng Δ.

c) Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và các trục toạ độ.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và đường thẳng

$$\Delta': x = y = z.$$

e) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả Δ và Δ'.

Giải

a) Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

Vì điểm M(x; y; z) có hình chiếu trên mp(Oxy) là M'(x; y; 0) nên hình chiếu d_1 của Δ trên mp(Oxy) có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + \\ z = 0 \end{cases}$

Hình chiếu d_2 của Δ trên mp(Oyz) là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

Hình chiếu d_3 của Δ trên mp(Oxz) là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$

b) Lấy $M(1 + 2t, -1 - t, 3t) \in \Delta$, thay tọa độ của M vào phương trình mp(α) ta có: $1 + 2t - 5(1 + t) + 3t + 4 = 0$ thỏa nên $M \in (\alpha)$.

Vậy $\Delta \subset (\alpha)$, tức mp(α) đi qua Δ.

c) Δ qua điểm $M(1; -1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$

Đường thẳng chứa trục Ox qua $O(0; 0; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$

Khoảng cách giữa Δ với trục Ox là:

$$h_1 = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{i}\right].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{i}\right]\right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Khoảng cách giữa Δ với trục Oy là:

$$h_2 = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{j}\right].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{j}\right]\right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Khoảng cách giữa Δ với trục Oz là:

$$h_3 = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{k}\right].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{k}\right]\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) Lấy $P(1 + 2t; -1 - t; 3t) \in \Delta$; Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$

$Q(t', t', t') \in \Delta'$; Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (1; 1; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{QP} = (1 + 2t - t'; -1 - t - t'; 3t - t')$

PQ là đường vuông góc chung của Δ và Δ' khi và chỉ khi $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$ và $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}\,'$, tức là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{QP}.\vec{u}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + 2t - t') - (-1 - t - t') + 3(3t - t') = 0 \\ 1 + 2t - t' - 1 - t - t' + 3t - t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14t - 4t' = -3 \\ 4t - 3t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{9}{26} \\ t' = -\dfrac{6}{13} \end{cases}$$

Do đó $Q\left(-\dfrac{6}{13}; -\dfrac{6}{13}; -\dfrac{6}{13}\right)$ và $\overrightarrow{QP} = \left(\dfrac{20}{16}; \dfrac{-5}{16}; \dfrac{-15}{16}\right) = \dfrac{5}{16}(4; -1; -3)$

Đường thẳng PQ qua Q và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (4; -1; -3)$.

nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -\dfrac{6}{13} + 4t \\ y = -\dfrac{6}{13} - t \\ z = -\dfrac{6}{13} - 3t \end{cases}$

e) Lấy $P(1 + 2t; -1 - t; 3t) \in \Delta$

$Q(t'; t'; t') \in \Delta'$

$PQ \mathbin{//} Oz \Leftrightarrow \overrightarrow{QP}$ cùng phương với $\vec{k} = (0; 0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t - t' = 0 \\ -1 - t - t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{2}{3} \\ t' = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy PQ qua $Q\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0\ 1)$ nên

PQ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} + t \end{cases}$

10. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1 ; –1 ; 2) ; B(2 ; 0 ; 1).*

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 2$.

b) Tìm quỹ tích các điểm N sao cho $NA^2 + NB^2 = 3$.

c) Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy).

Giải

a) Giả sử M(x; y; z) ta có: $MA^2 - MB^2 = 2$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 - (2 - x)^2 - y^2 - (1 - z)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z - 1 = 0$

Vậy quỹ tích các điểm M là mặt phẳng có phương trình:

$2x + 2y - 2z - 1 = 0$

b) Giả sử N(x; y; z) ta có: $NA^2 + NB^2 = 3$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 + (2 - x)^2 + y^2 + (1 - z)^2 = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 3z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

Vậy quỹ tích các điểm N là mặt cầu có tâm $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Mặt phẳng (OAB) đi qua O, có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (-1; 3; 2)$ nên có phương trình:

$-x + 3y + 2z = 0$. Mp(Oxy) có phương trình: $z = 0$

Điểm M(x; y; z) cách đều mp(OAB) và mp(Oxy) khi và chỉ khi:

$$\frac{|-x + 3y + 2z|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = |z| \Leftrightarrow -x + 3y + 2z = \pm\sqrt{14}\,z$$

$$\Leftrightarrow -x + 3y + (2 \mp \sqrt{14})z = 0$$

Vậy quỹ tích cần tìm là hai mặt phẳng có phương trình

$$3x + 3y + (2 \pm \sqrt{14})z = 0$$

11. *Trong không gian toạ độ Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình :*

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \end{cases}$$

trong đó a, b, c thay đổi sao cho $c^2 = a^2 + b^2$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định, góc giữa Δ và Oz là không đổi.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của Δ và mp(Oxy).

Giải

a) Δ đi qua điểm A(1; 1; 5) cố định

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$

Gọi φ là góc giữa Δ và trục Oz. Ta có:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{k})\right| = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{c}{c\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $\varphi = 45^0$.

b) Vì $c^2 = a^2 + b^2$ nên $c \neq 0$ (vì nếu $c = 0$ thì $a = b = 0$)

Gọi M(x; y; z) là giao điểm của Δ và mp(Oxy) thì (x; y; z) thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = at \\ y - 1 = bt \\ t = -\frac{5}{c} \\ z = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $(x-1)^2+(y-1)^2=(a^2+b^2).\dfrac{25}{c^2}=25$ và $z=0$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I(1; 1; 0) bán kính bằng 5 và nằm trong mp(Oxy).

12. *Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ với : AB = a, BC = b, CC′ = c.*

a) Tính khoảng cách từ điểm A tới mp(A′BD).

b) Tính khoảng cách từ điểm A′ tới đường thẳng C′D.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC′ và CD′.

Giải

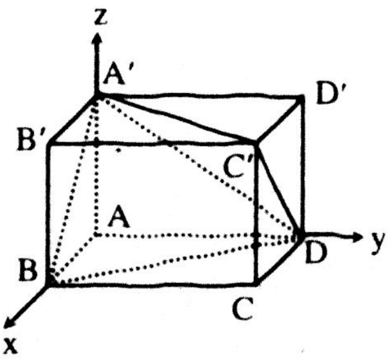
a) Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

Ta có: A′(0; 0; c); B(a; 0; 0); D(0; b; 0)

Phương trình mp(A′BD) là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$

Khoảng cách từ A(0; 0; 0) tới mp(A′BD) là:

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$



b) Ta có C′(a; b; c)

$\overrightarrow{A'C'}=(a;b;0)$, $\overrightarrow{C'D}=(-a;0;-c)$

$[\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'D}]=(-bc;ac;ab)$

Khoảng cách từ A′(0; 0; c) tới đường thẳng C′D là:

$$h_1=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'D}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{C'D}\right|}=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

c) Ta có $\overrightarrow{BC'}=(0;b;c)$, $\overrightarrow{CD'}=(-a;0;c)$, $\overrightarrow{BC}=(0;b;0)$, khoảng cách giữa BC′ và CD′ là: $h_2=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{CD'}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{CD'}\right]\right|}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. *Cho $\mathscr{H}$ là hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Xét các mặt phẳng : (SAC), (SAB), (SBD), (ABC), (SOI), trong đó I là trung điểm của AB, O là tâm hình vuông ABCD. Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$?*

(A) 1 ; *(B) 2 ;* *(C) 3 ;* *(D) 4.*

2. *Gọi $\mathscr{H}$ là lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F'. Xét các mặt phẳng : mp(AA'D), mp(ACA'), mp(ABB'), mặt phẳng trung trực của DD', mặt phẳng trung trực của AB. Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$?*

(A) 1 ; *(B) 2 ;* *(C) 3 ;* *(D) 4.*

3. *Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', M là trung điểm của cạnh AB. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào* ***sai*** *?*

(A) $V_{A'B'C'C} = V_{MA'B'C'}$; *(B)* $V_{ABCC'} = V_{A'BCC'}$;

(C) $V_{MA'B'C'} = V_{A'ABC}$; *(D)* $V_{MA'B'C'} = \frac{1}{2} V_{AA'B'C'}$.

4. *Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào* ***sai*** *?*

(A) $V_{A'BCC'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$; *(B)* $V_{A'BB'C'C} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'}$;

(C) $V_{A'BCC'B'} = 2V_{AA'BC}$; *(D)* $V_{CABB'A'} = V_{C'ABB'A'}$.

5. *Cho khối chóp tứ giác S.ABCD và các điểm A', B', C', D' lần lượt nằm trên các đường thẳng SA, SB, SC, SD nhưng không trùng với S.*

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'}$;

(B) $\dfrac{V_{S'.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'} \cdot \dfrac{SD}{SD'}$;

(C) $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SC}{SC'} + \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SD}{SD'}$;

(D) $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SC}{SC'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

6. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

(A) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu đáy là đa giác nội tiếp.

(B) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu tất cả các mặt đều là đa giác nội tiếp.

(C) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu có mặt bên vuông góc với mặt đáy.

(D) Đa diện nội tiếp được một mặt cầu nếu các mặt đều là đa giác nội tiếp.

7. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

(A) Đường tròn đi qua ba điểm phân biệt nằm trên mặt cầu thì nằm hoàn toàn trên mặt cầu.

(B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua 4 đỉnh của một hình thang cân cho trước.

(C) Hình chóp có đáy là hình thang vuông luôn luôn nội tiếp một mặt cầu.

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

8. Cho khối trụ có bán kính $a\sqrt{3}$ và chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của nó là :

(A) $4\pi a^3\sqrt{2}$; (B) $9a^3\sqrt{3}$; (C) $6\pi a^3\sqrt{3}$; (D) $6\pi a^2\sqrt{3}$.

9. Đáy hình chóp là hình vuông diện tích bằng 4. Các mặt bên là những tam giác đều. Diện tích toàn phần của hình chóp là :

(A) $4 + 4\sqrt{3}$; (B) 8 ; (C) 16 ; (D) $4 + 4\sqrt{2}$.

10. Một hình nón có đường sinh bằng l và bằng đường kính đáy. Bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là :

(A) $\frac{1}{3}l$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}l$; (C) $\frac{\sqrt{2}}{6}l$; (D) $\frac{3}{4}l$.

11. Một hình cầu có thể tích $\frac{4\pi}{3}$ nội tiếp một hình lập phương. Thể tích của hình lập phương đó bằng :

(A) 8 ; (B) 4π ; (C) 1 ; (D) $2\pi\sqrt{3}$.

12. Cho hình chữ nhật có hai đỉnh $A(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$, $B(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ và một cạnh nằm trên trục Ox. Khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật đó khi quay quanh trục Oy, có thể tích là :

(A) $6\pi^2$; (B) 12 ; (C) 12π ; (D) $\frac{4\pi}{3}$.

13. Cho vectơ $\vec{u}(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ và $\vec{v}(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào cùng phương với $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$:

(A) $\vec{a}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$; (B) $\vec{b}(-2\ ;\ 1\ ;\ 1)$;

(C) $\vec{c}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$; (D) $\vec{d}(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

14. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trong mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 5 = 0$. Tính thể tích hình chóp S.ABC với $S = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

(A) $3\sqrt{6}$; (B) $12\sqrt{2}$; (C) 8 ; (D) 4.

15. Mặt cầu tâm $I(6\ ;\ 3\ ;\ -4)$, tiếp xúc với trục Ox có bán kính là

(A) 5 ; (B) $2\sqrt{3}$; (C) $4\sqrt{3}$; (D) 4.

16. Cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Phương trình tham số nào sau đây cũng là phương trình của d ?

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$; *(B)* $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$; *(C)* $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$; *(D)* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

17. *Cho hai đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ *và d' :* $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. *Khi đó :*

(A) d cắt d' ; *(B) d trùng d' ;*

(C) d và d' chéo nhau ; *(D) d song song với d'.*

18. *Cho mặt phẳng (P) : 3x + 4z + 12 = 0 và mặt cầu (S) :* $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$. *Khi đó :*

(A) (P) đi qua tâm mặt cầu (S) ; *(B) (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) ;*

(C) (P) cắt (S) theo một đường tròn ; *(D) (P) không cắt (S).*

19. *Toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm M(2 ; 0 ; 1) trên đường thẳng*

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ là :}$$

(A) (1 ; 0 ; 2) ; *(B) (2 ; 2 ; 3) ;* *(C) (0 ; –2 ; 1) ;* *(D) (–1 ; 4 ; 0).*

20. *Cho hai đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ *và d' :* $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. *Khoảng cách giữa d và d' là*

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; *(B)* $\frac{\sqrt{14}}{2}$; *(C)* $\frac{1}{\sqrt{6}}$; *(D)* $\sqrt{2}$.

21. *Cho hai đường thẳng d :* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$ *và d' :* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases}$. *Phương trình đường vuông góc chung của d và d' là :*

(A) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$; *(B) d :* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = -5 + t \end{cases}$;

(C) $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$; *(D)* $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$.

22. *Cho mặt phẳng (P) : mx + y + (n – 2)z + m + 2 = 0. Với mọi m, n, mặt phẳng (P) đi qua điểm cố định có toạ độ là:*

(A) (1 ; 2 ; 0) ; *(B) (2 ; 1 ; 0) ;*

(C) (0 ; 1 ; –2) ; *(D) (–1 ; –2 ; 0).*

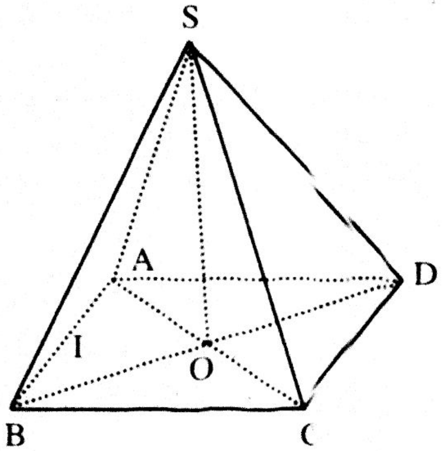
23. *Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm S(3 ; 4 ; 3) có phương trình :*

(A) $4x + 4y - 2z - 17 = 0$; *(B)* $2x + 2y + z - 17 = 0$;

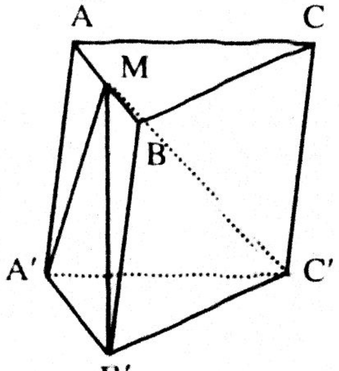
(C) $2x + 4y + z - 17 = 0$; *(D)* $x + y + z - 17 = 0$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Có 3 mặt phẳng là mặt phẳng đối xứng của H, đó là: mp(SAC), mp(SBD), mp(SOI). Chọn (C).



2. Có 3 mặt phẳng là mặt phẳng đối xứng của H, đó là mp(AA'D), mặt phẳng trung trực của DD', mặt phẳng trung trực của AB. Chọn (C).



3. Ta có: $V_{MA'B'C'} = V_{AA'B'C'}$. Chọn (D)

4. Ta có: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{A.BB'C'C} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$. Chọn (B).

5. Xem bài tập 23 §4 chương I. Chọn (A).

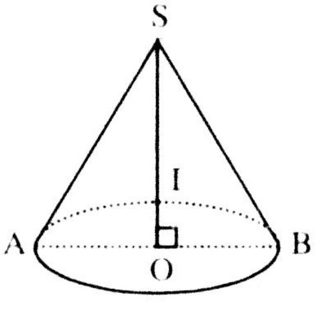
6. Hình lăng trụ nội tiếp một mặt cầu nếu tất cả các mặt của nó đều là đa giác nội tiếp. Chọn (B).

7. Đường tròn đi qua ba điểm phân biệt nằm trên mặt cầu thì nằm hoàn toàn trên mặt cầu. Chọn (A).

8. $V_{trụ} = S_đ.h = \pi(a\sqrt{3})^2.2a\sqrt{3} = 6\pi a^3\sqrt{3}$. Chọn (C).

9. Cạnh hình vuông đáy là a = 2. Mặt bên là tam giác đều cạnh a nên diện tích mặt bên là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Vậy $S_{tp} = S_đ + 4S = 4 + 4\sqrt{3}$. Chọn (A).



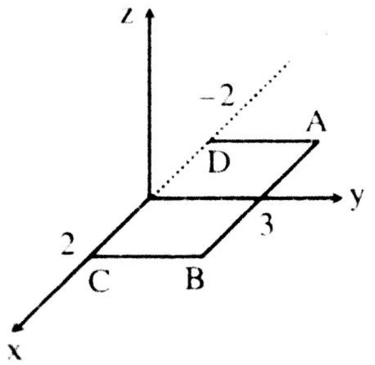
10. ΔSAB là tam giác đều cạnh l

Đường cao $SO = l\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là

$r = \frac{1}{3}SO = \frac{l\sqrt{3}}{6}$. Chọn (B).

11. Thể tích hình cầu bán kính là R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow R = 1$. Hình lập phương ngoại tiếp hình cầu bán kính R có cạnh là $a = 2R = 2$. Vậy thể tích của hình lập phương đó bằng $a^3 = 8$. Chọn (A).



12. Hình chữ nhật ABCD, trong đó C(2; 0; 0), D(−2; 0; 0). Khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật ABCD khi quay quanh trục Oy là khối trụ có bán kính đường tròn đáy R = 2, chiều cao h = 3 nên có thể tích là $V = \pi.R^2.h = 12\pi$. Chọn (C).

13. Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right) = (2; -1; -1) = -\vec{b}$.

Chọn (B).

14. Khoảng cách h từ S đến mp(α) chính là chiều cao SH của hình chóp S.ABC.

Ta có: $h = SH = \frac{|2.1 - 2.1 + 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3} = 2$

Thể tích hình chóp S.ABC là $V = \frac{1}{3}.6.2 = 4$. Chọn (D).

15. Hình chiếu của I(6; 3; −4) lên trục Ox là điểm I'(6; 0; 0). Bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Ox là $R = II' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Chọn (A).

16. d đi qua điểm A(1; 2; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$

Đường thẳng có phương trình tham số $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ cũng đi qua A(1; 2; 3) (ứng với $t = -\frac{1}{2}$) và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (4; -2; 2)$ cùng phương với $\vec{u}$.

Chọn (B).

17. d đi qua A(1; 2; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$

d' đi qua B(1; −1; 2) có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (2; 2; -2)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; -3; -1)$ không cùng phương với $\vec{u}\,'$ và $\vec{u}$, $\vec{u}\,'$ cùng phương nên d // d'. Chọn (D).

18. (S) có tâm I(0; 0; 2) bán kính R = 1

Khoảng cách từ I đến mp(P) là $d = \dfrac{|4.2 + 12|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = 4 > 1$

Vậy mp(P) không cắt (S). Chọn (D).

19. Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Lấy N(1 + t; 2t; 2 + t) ∈ Δ $\overrightarrow{MN} = (t - 1; 2t; t + 1)$

N là hình chiếu vuông góc của M trên Δ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} \perp \vec{u}$ (với $\vec{u} = (1; 2; 1)$ là vectơ chỉ phương của Δ).

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 4t + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy N(1; 0; 2). Chọn (A).

20. d đi qua điểm A(1; −1; 1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 0)$

d' đi qua điểm B(2; −2; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (-1; 1; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$; $[\vec{u}; \vec{u}\,'] = (-1; -2; 1)$

Khoảng cách giữa d và d' là $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.[\vec{u}, \vec{u}']\right|}{\left|[\vec{u}, \vec{u}']\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Chọn (A).

21. d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 1)$; d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}\,' = (0; -2; 3)$

Lấy M(1 + t; 0; −5 + t) ∈ d và N(0; 4; −2t'; 5 + 3t') ∈ d'

$\overrightarrow{MN} = (-1 - t; 4 - 2t'; 10 + 3t' - t)$

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}' = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - t + 10 + 3t' - t = 0 \\ -8 + 4t' + 30 + 9t' - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t' - 2t = -9 \\ 13t' - 3t = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Vậy M(4; 0; −3) và $\overrightarrow{MN} = (-4; 6; 4) = 2(-2; 3; 2)$

Vậy MN: $\dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z + 2}{2}$. Chọn (D).

22. Lần lượt thay tọa độ các điểm vào (P) ta được (−1; −2; 0) ∈ (P). Chọn (D).

23. Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 2) bán kính R = 3; $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$ cùng phương với pháp vectơ của mặt phẳng có phương trình: 2x + 2y + z − 17 = 0. Chọn (B).

MỤC LỤC

Chương I. **KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG**

§1. Khái niệm về khối đa diện 5
§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện 7
§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều *11*
§4. Thể tích của khối đa diện *14*
Ôn tập chương I *21*

Chương II. **MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN**

§1. Mặt cầu, khối cầu *33*
§2. Khái niệm về mặt tròn xoay *40*
§3. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ *40*
§4. Mặt nón, hình nón và khối tròn *44*
Ôn tập chương II *48*

Chương III. **PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

§1. Hệ tọa độ trong không gian *60*
§2. Phương trình mặt phẳng *70*
§3. Phương trình đường thẳng *78*
Ôn tập chương III *88*
Ôn tập cuối năm *111*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :
***Giám đốc* : PHÙNG QUỐC BẢO**
***Tổng biên tập* : PHẠM THỊ TRÂM**
Biên tập : Hữu Nguyên - Đặng Thị Bình
Trình bày : Diệu Tâm
Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng
Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO

Mã số : 1L-167ĐH2010.
In 3000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty Cổ Phần In Tiền Giang.
Số xuất bản: 290-2010/CXB/19-50/ĐHQGHN ngày 01/4/2010.
Quyết định xuất bản số : 167LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.